

1 群 ( 信号・システム ) - 5 編 ( 信号理論 )

---

### 3 章 信号の標本化

( 執筆者 : 平林 晃 ) [ 2009 年 12 月 受領 ]

概要

【本章の構成】

## 1 群 - 5 編 - 3 章

## 3-1 標本化と再構成

(執筆者: 平林 晃)[2009 年 12 月受領]

本節では信号の標本化と再構成について解説する。時間、電圧、強度など、自然界に存在する多くの信号は本質的にアナログ量であるが、それらを処理する装置のほとんどはデジタルデバイスである。アナログとデジタルをつなぐ理論が標本化理論であり、その意味において信号処理分野の基盤をなす理論である。この分野で最もよく知られた結果は、帯域制限信号に対する標本化定理である。

定理 1 信号  $f(t)$  が帯域制限を受けているとき、即ち  $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = 0$  ( $|\omega| \geq \Omega$ ) を満たしているとき、 $f(t)$  は間隔  $T = \pi/\Omega$  で得られた標本値  $f(nT)$  を用いて

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (3.1)$$

によって完全再構成できる。ここで、 $\operatorname{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$  である。

この定理は Shannon の名を冠して呼ばれることが多いが<sup>1)</sup>、イギリスの Whittaker<sup>2)</sup>、日本の Ogura<sup>3)</sup>、旧ソ連の Kotelnikov<sup>4)</sup>、日本の染谷<sup>5)</sup> などがそれぞれ独立に発見している。特に近年、日本でも埋もれかけていた染谷の業績に、改めて光を当てる文献が出版されている<sup>6,7)</sup>。

定理 1 の証明は、信号  $f(t)$  のフーリエ変換  $\hat{f}(\omega)$  を標本値の離散時間フーリエ変換から理想ローパスフィルタによって取り出すことにより行われることが多い。そのほかにも、 $\hat{f}(\omega)$  を区間  $[-\Omega, \Omega]$  でフーリエ級数展開することによる証明は非常に簡明である。

定理 1 は過剰標本化や雑音を含む標本化、あるいは多次元入力信号や不規則標本化など、様々な方向に拡張されている。定理 1 を含めたこれらの膨大な結果は、サーベイ論文<sup>8,9)</sup>や書籍<sup>10,11,12)</sup>に非常に詳しくまとめられているので、ここでは割愛する。

標本化理論の目的は大きく 2 種類に分けられる。第 1 は信号の完全再構成であり、定理 1 もそのためのものである。ここで注意すべきことは、完全再構成のためには帯域制限などの条件が満たされなければならない、これらの条件の成立は現実的には難しい場合が多くある。この問題を回避するために考えられてきた第 2 の目的が最良近似再構成である。小川による一般化標本化定理<sup>13,14)</sup>や帯域制限を受けていない関数に対する標本化定理<sup>15)</sup>などがこの流れの研究である。本節ではまずこれらの研究を概説する。その後、今世紀に入って活発に議論されるようになってきたスパースサンプリングと呼ばれる分野の 2 テーマを解説する。第 1 は自由度率有限信号 (signals with finite rate of innovations) に対する標本化定理であり、第 2 は圧縮センシング (compressed sensing / compressive sampling) である。

## 3-1-1 近似理論としての標本化理論

## (1) はじめに

定理 1 は信号  $f$  が帯域制限を受けていれば適用可能であり、 $f$  は完全再構成される。一方、 $f$  が帯域制限を受けていない場合の標準的な対応は、 $f$  をローパスフィルタに入力し、その

出力結果に対して定理 1 が適用される．こうして得られた結果  $\tilde{f}$  は，ローパスフィルタに理想特性を用いた場合には，帯域制限信号全体からなる部分空間への  $f$  の正射影になっているのである<sup>15)</sup>．正射影はその部分空間における最良近似である．すなわち，標準的な対応は期せずして，再構成可能な信号の中で最良の結果を求めているのである．

最良近似を求めることを目的に考えれば，標本化と再構成の問題は必ずしも定理 1 の形式に縛られる必要はない．まず第 1 に，信号は帯域制限を受けている必要はない．第 2 に，部分空間は帯域制限を受けている関数の全体に縛られない．特に，帯域制限部分空間の基底の一つは sinc 関数列であり，その減衰は極めて遅い．可能であれば，コンパクトサポート関数を用いた方が都合が良い．第 3 に，現実の観測には空間的，時間的な拡がりが必要であり，理論的な一瞬や一点における値を得ることはできない．これらのことを考慮した標本化定理が 1980 年代末以降に開発されてきた．本説ではこれらの結果を解説する．

## (2) 標本化再構成問題の定式化

標本化定理を近似の立場から理解するために，ヒルベルト空間の知識を利用する．ヒルベルト空間  $H$  とは内積が定義された線形空間であり，任意のコーシー列が収束するものを意味する<sup>16,17)</sup>．内積を  $\langle f, g \rangle$  で表し，ノルムを  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$  で定義する．

信号  $f(t)$  の測定値を  $d_n$  ( $n \in I_n$ ) で表す．ここで， $I_n$  は  $n$  の添字集合であり，定理 1 では整数集合  $Z$  を表すが，現実的には無限の測定は不可能であり，有限集合となる．式 (3.1) における  $d_n$  は  $t = nT$  という 1 点における  $f$  の値  $f(nT)$  であり，このモデルは理想標本化と呼ばれる．一方，現実の観測における空間的，時間的な拡がりを考慮する場合には，その影響を標本化関数  $\psi_n(t)$  で表現し， $d_n$  を  $f$  と  $\psi_n$  の内積でモデル化する：

$$d_n = \langle f, \psi_n \rangle \quad (n \in I_n) \quad (3.2)$$

式 (3.2) のモデルは一般標本化と呼ばれる．例えば測定値がインパルス応答や点広がり関数 (PSF) との畳込みで表現されるシフト不変線形システムはこのモデルによって表現される\*．また，標本化関数  $\psi_n(t)$  にデルタ関数  $\delta(t - nT)$  を用いることにより，あるいは部分空間  $V$  に再生核  $R(t, t')$  が存在する場合は  $\psi_n(t) = R(t, nT)$  とおくことにより， $f \in V_r$  に対して式 (3.2) は  $d_n = f(nT)$  に帰着される．関数系  $\{\psi_n\}_{n \in I_n}$  で張られる  $H$  の部分空間を標本化空間と呼び  $V_s$  で表す．また， $d_n$  が第  $n$  要素であるベクトルを  $d$  で表す．

式 (3.1) は sinc 関数の線形結合によって  $f$  を再構成しているが，上記のとおり，必ずしもこの関数を用いる必要はない．そこでより一般的な再構成関数  $\{\varphi_k\}_{k \in I_k}$  を考え，それらの線形結合で  $\tilde{f}$  を表す：

$$\tilde{f} = \sum_{k \in I_k} a_k \varphi_k \quad (3.3)$$

ここで， $I_k$  は  $k$  の添字集合であり，定理 1 では整数集合  $Z$  を表すが，現実的の計算では有限集合を考えることになる．関数  $\varphi_k$  を再構成関数と呼ぶ．また，関数系  $\{\varphi_k\}_{k \in I_k}$  で張られる  $H$  の部分空間を再構成空間と呼び  $V_r$  で表す．部分空間  $V_s$  及び  $V_r$  は問題設定の特徴づけに便利であり，本節でも利用していく．なお，標本化関数及び再構成関数はそれぞれ  $V_s, V_r$  にお

\* より一般的な非線形標本化モデルに関する研究も行われている<sup>18)</sup>．

いて線形独立であっても，線形従属であっても構わない．それぞれの場合において，適切な議論を展開できる．係数  $a_k$  が第  $k$  要素であるベクトルを  $a$  で表す．

以上の枠組みにおいて， $\tilde{f}$  が  $f$  の何らかの意味で最適な再構成になるように  $d$  から  $a$  を求める問題が標本化定理の問題である．関数  $\psi_n, \varphi_k$  が共に既知の場合は， $d$  から  $a$  への対応づけは線形作用素  $X$  で表現される：

$$Xd = a \quad (3.4)$$

具体的には，添字集合  $I_n, I_k$  が共に有限集合である場合には  $X$  は行列で表現され， $I_n, I_k$  が無限集合でありかつ  $\psi_n, \varphi_k$  が共に整数シフトで生成されている場合には， $X$  は畳込み演算で表現される．一方， $\psi_n$  あるいは  $\varphi_k$  に未知要素が含まれる場合には， $d$  から  $a$  への対応づけはもはや線形作用素では表現できなくなる．この文脈で考えれば，3-1-2 節及び 3-1-3 節の議論は  $\varphi_k$  に未知要素を含む場合に対応している．また本節では触れないが，マルチチャンネル標本化においてチャンネル間関係が未知の場合は， $\psi_n$  に未知要素を含む場合になっている<sup>19, 20</sup>．これらの場合には，評価関数の最小化などの非線形処理が必要になる．

### (3) 最良近似再構成

例えば， $H = L_2(-\infty, \infty)$  を考える．この空間は， $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$  である関数の全体である．対応する内積は， $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt$  である．帯域制限を受けている関数の全体からなる空間  $V_r$  は，この  $H$  の部分空間になっている ( $V_r \subset H$ )．定理 1 では標本化対象関数  $f$  が  $V_r$  の元であると仮定していたが，ここでは  $H$  の元であることを仮定する．これは，帯域制限部分空間よりもはるかに広い空間を考えていることになる．式 (3.1) の再構成関数  $\{\text{sinc}(t/T - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $V_r$  の直交系になっている．とりわけ， $T = 1$  である場合には正規直交系になる．この場合， $\varphi_n(t) = \text{sinc}(t - n)$  とおけば，

$$\tilde{f} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (3.5)$$

は  $f \in V_r$  に対しては  $f$  を与え，それ以外の  $f \in H$  に対しては  $f$  の  $V_r$  への正射影  $P_{V_r} f$  を与える．更に，内積  $\langle f, \varphi_n \rangle$  は  $f \in V_r$  に対しては  $f(n)$  であり，それ以外の  $f \in H$  に対しては  $(P_{V_r} f)(n)$  である．したがって，式 (3.5) は  $f \in V_r$  に対しては  $\tilde{f} = f$  の完全再構成公式を与え，それ以外の  $f \in H$  に対しては正射影を求める最良近似公式になるのである．

このような考えに基づく標本化定理は 1980 年代末，小川によって論じられたのが初めてである<sup>13, 14</sup>．そこでは，標本化関数が与えられている場合に再構成関数を設計することにより，最良近似再構成を求めるための標本化定理が示されている．すなわち， $\{\psi_n\}_{n \in I_n}$  の共役基底  $\{\tilde{\psi}_n\}_{n \in I_n}$  を用いることにより，

$$\tilde{f} = \sum_{n \in I_n} \langle f, \psi_n \rangle \tilde{\psi}_n \quad (3.6)$$

によって最良近似を再構成できる．そして，この  $\tilde{f}$  は標本化空間  $V_s$  への  $f$  の正射影になっている．双対基底の求め方は，擬似双直交性理論<sup>21</sup>)や wavelet 理論<sup>22</sup>)に詳しい．また，画像復元のための射影フィルタは，数学的にはこの最良近似再構成を求める手法になっている<sup>23</sup>)．

上記とは反対に、再構成関数が与えられている場合に標本化関数を設計することにより最良近似再構成を求める問題を考えることもできる。この場合、 $\{\varphi_k\}_{k \in I_k}$  の共役基底  $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k \in I_k}$  を用いて

$$\tilde{f} = \sum_{k \in I_k} \langle f, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k \quad (3.7)$$

によって最良近似を再構成できる。この考えに基づき、再構成関数が式 (3.5) のように sinc 関数だけでなく、コンパクトサポートをもつ B-spline 関数<sup>24)</sup>を用いた場合の標本化定理も与えられている<sup>25)</sup>。

#### (4) 最良近似再構成条件の緩和

前項では、標本化関数もしくは再構成関数のどちらかが設計可能である場合を想定していた。しかし、状況によっては両者が共に与えられてしまい、設計できない場合も考えられる。例えば、デジタル録音された音声信号を市販の機器で再生する場合には、標本化特性も出力フィルタ（再構成関数）も既に決まっており、設計はできない。一般に、 $V_r \subset V_s$  である場合に、またその場合に限って  $\tilde{f}$  が  $f$  の正射影になるような  $a$  を与える線形作用素  $X$  が存在する<sup>13)</sup>。この条件が成立していない場合には最良近似を求めることができないので、再構成の条件を緩める必要が生じてくる。

そうした条件の一つがコンシステンシである。この条件は再構成結果  $\tilde{f}$  の  $\psi_n$  による観測結果が  $f$  に等しいことを意味しており、

$$\langle \tilde{f}, \psi_n \rangle = \langle f, \psi_n \rangle \quad (3.8)$$

と表現される。この条件を用いて Unser などは、 $\psi_n$  及び  $\varphi_k$  が共に整数シフトで生成されている場合に、 $V_r + V_s^\perp = H$  かつ  $V_r \cap V_s^\perp = \{0\}$  との条件のもとで、コンシステンシ再構成  $\tilde{f}$  が  $V_s^\perp$  に沿った  $V_r$  への  $f$  の斜射影になることを示した。そして、それを与える係数  $a_k$  が、相互相関系列  $\langle \varphi_0, \psi_n \rangle$  の逆フィルタと  $d_n$  との畳込みによって求められることを示した<sup>26)</sup>。

再構成空間  $V_r$  の中で  $f$  の最良近似はあくまで正射影  $P_{V_r} f$  であるが、条件  $V_r \subset V_s$  が成立しないことを想定しており、求めることはできない。もし仮に、コンシステント再構成  $\tilde{f}$  の誤差が最良近似再構成の誤差とそれほど異ならなければ、コンシステント再構成を求める価値が明確になる。この問題に対して Unser などは、前者  $\|\tilde{f} - f\|$  が後者  $\|P_{V_r} f - f\|$  を用いて

$$\|\tilde{f} - f\| \leq \frac{1}{\cos \theta} \|P_{V_r} f - f\| \quad (3.9)$$

と評価されることを示した<sup>26, 15)</sup>。ここで、 $\theta$  は部分空間  $V_r, V_s$  の間の一般化された「角度」である（詳細は当該文献を参照頂きたい）。例えば、再構成関数が三次 B-spline 関数であり、標本化関数が五次 B-spline 関数である場合には、 $\cos \theta = 0.991$  であることが示されている<sup>15)</sup>。

以上の議論は  $\psi_n, \varphi_k$  が共に整数シフトで生成され、かつ線形独立な場合であったが、両関数が整数シフトに制限されず、かつ線形従属な場合に拡張した場合（過剰標本化）も議論されている<sup>27, 28)</sup>。また、条件  $V_r \cup V_s^\perp = \{0\}$  が成立していない不足標本化も論じられている<sup>29, 30)</sup>。各種再構成関数に対する FFT を用いた高速計算法も提案されている<sup>31)</sup>。

コンシステント再構成は  $V_r$  と  $V_s$  が大きく異なる場合には、 $f$  との誤差も大きくなってしまふ。この問題を解決するために、Minimax 評価基準を使った再構成手法も提案されていることを申し添える<sup>32, 33)</sup>。

### 3-1-2 自由度率有限信号に対する標本化定理

#### (1) はじめに

定理 1 は信号が帯域制限されていれば完全再構成できることを示しているが、それ以外の関数に対する完全再構成に関しては何も述べていない。すなわち、帯域制限は完全再構成に対する十分条件であって、必要条件ではない。それでは、帯域制限以外にどのような条件を満たす信号を完全再構成できるのか、またその信号はどのように完全再構成されるのかという疑問がわいてくる。この疑問に対する答えの一つが自由度率有限信号に関する研究である<sup>34, 35, 36, 37, 38)</sup>。

#### (2) 自由度率有限信号

再び定理 1 を見直すと、任意の帯域制限信号  $f(t)$  が  $\text{sinc}(t/T - k)$  の線形結合で表現できることを示しているが、逆に  $\text{sinc}(t/T - k)$  の任意の線形結合は明らかに帯域制限を受けている。したがって、定理 1 が対象とする関数集合である帯域制限関数の特徴づけに、式 (3・1) を利用できることになる。Vetterli などはこのことに着目し、式 (3・1) で定義される信号の自由度が、平均的にサンプリング間隔  $T$  ごとに測定値  $f(nT)$  の 1 個であるとらえた。更にこの考え方を一般化し、関数  $\varphi(t)$  を任意量  $\{t_k\}_{k=0, \dots, K-1}$  だけ平行移動した関数の線形結合

$$f(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k g(t - t_k) \quad (3 \cdot 10)$$

を考えた。この信号の自由度は、 $g(t)$  が既知であるとの前提のもとで、平行移動量  $t_k$  と係数  $a_k$  である。区間  $[t_1, t_2]$  における信号  $f(t)$  の自由度計数関数  $C_f(t_1, t_2)$  を用いて、自由度率 (rate of innovation) を  $\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_f(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$  と定義する。

定義 1<sup>34)</sup> 式 (3・10) で定義される  $f(t)$  の自由度率  $\rho$  が有限である場合、 $f(t)$  を自由度率有限信号 (a signal with a finite rate of innovation, FRI 信号) と呼ぶ。

このように制限されたクラスの信号に対して適切な関数  $\psi(t)$  を用いてサンプリングすることにより、完全再構成が可能になるのである。ここで注意すべきことは、平行移動量  $t_k$  が未知であることから明らかなように、再構成手法はもはや線形になっていないということである。

#### (3) サンプリング関数

自由度率有限信号の標本化に用いることができる関数は、再構成手法と密接な関係がある。特に、後述の annihilating filter を用いる場合には、標本化関数  $\psi_n(x)$  は条件

$$\sum_{n \in I_m} c_{m,n} \psi_n(t) = \{q(t)\}^m \quad (m = 0, 1, \dots, M-1) \quad (3 \cdot 11)$$

を満たさなければならない。ここで、 $N \geq M \geq 2K$  であり、 $q(t)$  は  $\psi_n(x)$  から決まる特定の関数である。例えば、従来の研究では  $\psi_n(t) = \psi(t/T - n)$  が想定されており、 $\psi(t)$  が Dirichlet 核

である場合は  $q(t) = e^{j2\pi t/\tau}$  となり ( $\tau$  は Dirichlet 核の周期), B-spline 関数<sup>24)</sup> の場合は  $q(t) = t$  となり, E-spline 関数<sup>39)</sup> の場合は  $q(t) = e^{\alpha t}$  となる ( $\alpha$  は適切な複素数). 式 (3.11) の構造を有する標本化を行うことにより,  $t_k$  の値が annihilating filter によって巧妙に抽出され, その結果を用いて  $a_k$  は線形演算で求めることができるようになる. 定数  $M$  に関する条件は, annihilating filter が有効に機能するために  $M \geq 2K$  が必要であり, それだけの  $M$  を生成するために  $N \geq M$  の標本が必要になるのである.

#### (4) インパルス列の再構成

自由度率有限信号の具体例としてまず, 区間  $[0, \tau]$  ( $\tau > 0$ ) で定義された重み付きインパルス列を考える:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k) \quad (3.12)$$

ここで  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < \tau$  である. この信号を考える理由は, インパルス列そのものがパルス変調に現れる重要な信号であるからだけでなく, この信号に対する結果を基に不等間隔スプライン信号や区分多項式信号に対する再構成アルゴリズムを導出できるからである<sup>34, 36)</sup>. 式 (3.12) は式 (3.10) において  $g(t) = \delta(t)$  の場合であり, この信号の自由度率は  $\rho = 2K/\tau$  である. したがって, この  $f(t)$  は定義 1 の FRI 信号であることが分かる.

この信号を式 (3.2) でサンプリングする. ここで,  $\psi_n(t) = \psi(t/T - n)$  であり,  $T = \tau/N \leq 1/\rho$  である. この条件は, 式 (3.11) で述べた条件  $N \geq M \geq 2K$  と矛盾していない. 得られた  $d_n$  から  $a_k, t_k$  ( $k = 0, \dots, K-1$ ) を求めることがここでの問題となる. そのために, 式 (3.11) の係数  $c_{m,n}$  と  $d_n$  の積和  $\hat{d}_m$  を求める. この値は,

$$\begin{aligned} \hat{d}_m &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} d_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \langle f, \psi_n \rangle = \left\langle f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} \psi_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{K-1} a_k \delta(t - t_k), \{q(t)\}^m \right\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \int_0^\tau \delta(t - t_k) \{q(t)\}^m dt \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k \{q(t_k)\}^m = \sum_{k=0}^{K-1} a_k u_k^m \end{aligned} \quad (3.13)$$

と表現される. ここで,  $u_k = q(t_k)$  とおいた. 式 (3.13) において重要なことは,  $m$  が  $u_k$  のべき乗にのみ現れているということである. 仮に  $K = 1$  の場合の  $\hat{d}_m$  は公比が  $u_0$  の等比級数になっているので, フィルタ  $\{1, -u_0\}$  との畳み込みが 0 になる. また  $K = 2$  の場合の  $\hat{d}_m$  は, 公比が  $u_0, u_1$  である 2 等比級数の線形和になっており, それぞれの級数とフィルタ  $\{1, -(u_0 + u_1), u_0 u_1\}$  との畳み込みはどちらも 0 になるので, 結局このフィルタは  $\hat{d}_m$  を 0 に変換することになる. このことを逆に利用すれば,  $\hat{d}_m$  に対する出力が 0 になるようなフィルタを求めれば, その係数から  $t_k$  を求められることを意味している. この考え方が annihilating filter と呼ばれているものである.

詳しく説明する. 求めるフィルタ係数を  $\{h_k\}_{k=0,1,\dots,K}$  で表す. その  $z$  変換  $H(z)$  は

$$H(z) = \sum_{k=0}^K h_k z^{-k} = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - u_k z^{-1})$$

を満たすことが想定されている．この関係から  $h_0 = 1$  であることが分かる．このことと，系列  $\hat{d}_m$  に対する出力が 0 であることから，

$$\hat{d}_m + h_1 \hat{d}_{m-1} + \dots + h_K \hat{d}_{m-K} = 0 \quad (3 \cdot 14)$$

が成立する．この関係を  $K$  個の連続する  $m$  に関してまとめて表現すれば，Toeplitz 行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{d}_{m-1} & \hat{d}_{m-2} & \dots & \hat{d}_{m-K} \\ \hat{d}_m & \hat{d}_{m-1} & \dots & \hat{d}_{m-K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{d}_{m+K-2} & \hat{d}_{m+K-3} & \dots & \hat{d}_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_K \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{d}_m \\ \hat{d}_{m+1} \\ \vdots \\ \hat{d}_{m+K-1} \end{pmatrix} \quad (3 \cdot 15)$$

となる．この方程式は， $t_k$  が互いに異なるので単一解をもつ．それを求めて，因数分解することにより  $u_k = q(t_k)$  を求め，更に  $t_k$  を求めることができる．式 (3・15) に現れる  $\hat{d}_m$  は  $2K$  個ある．このことが，式 (3・11) において  $M \geq 2K$  を仮定した理由である．

ひとたび  $t_k$  が求まれば，式 (3・13) は  $a_k$  に関する線形方程式になる．すなわち，Vandermonde 行列を用いて

$$\begin{pmatrix} u_0^m & u_1^m & \dots & u_{K-1}^m \\ u_0^{m+1} & u_1^{m+1} & \dots & u_{K-1}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{m+K-1} & u_1^{m+K-1} & \dots & u_{K-1}^{m+K-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{K-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_m \\ \hat{d}_{m+1} \\ \vdots \\ \hat{d}_{m+K-1} \end{pmatrix}$$

と表される．この方程式も  $t_k$  が互いに異なるので単一解をもち， $a_k$  を求めることができる．こうして信号  $f(t)$  を完全再構成できるのである．

測定値が雑音を含む場合， $y_n = d_n + \epsilon_n$  に対して上記の手続きを行うことになる．この場合，式 (3・14) に対応する関係が厳密には成立しない．そこで，フィルタ係数の二乗和が一定のもつとで，式 (3・14) の左辺の二乗和が最小になるフィルタを求めることにより対応される<sup>37)</sup>．

最後に，この研究の興味深い応用として，画像の特徴量抽出手法の開発がある<sup>38)</sup>．この手法によれば，画像に含まれる直線エッジを低解像度画像から極めて正確に抽出できる．抽出結果を図 3・1 に示す．この研究はまだ始まったばかりであり，今後の発展が期待される．

### 3-1-3 圧縮センシング (Compressed Sensing)

#### (1) はじめに

圧縮センシングとは観測対象信号に対するスパース性もしくは圧縮可能性の仮定のもとで，できる限り少ない観測データから観測信号を復元するための技術である．この理論では，観測 (標準化) 過程及び復元手法を共に設計する立場で議論する．特に重要な復元手法が  $l_1$  ノルム最小化原理であり，この原理が有効に機能するためには観測過程に条件が必要になる．本項では本研究の概略を説明する．

#### (2) 問題の定式化

圧縮センシングでは通常，観測対象信号  $f$  は離散ベクトルを考える (3-1-2 節では  $f$  は連

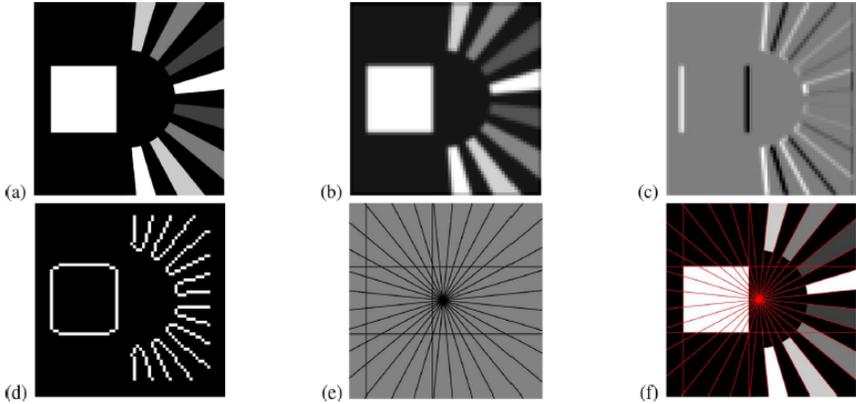


図 3・1 自由度率有限信号の再構成理論を用いた直線エッジの抽出結果<sup>38)</sup>。(a) 原画像, (b) 低解像度観測画像, (c) 水平方向の差分画像 (前処理), (d) Canny Edge 検出結果 (前処理), (e) 提案手法による検出結果, (f) 検出結果と原画像。

続信号であった)。この信号は、 $K$  次元ベクトル空間  $H$  の元であると仮定する。内積を  $\langle f, g \rangle$  で表す。 $H$  の任意に固定した基底を  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{K-1}$  で表せば、 $f$  を

$$f = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \varphi_k \quad (3 \cdot 16)$$

と表すことができる。係数  $a_k$  が第  $k$  番目の要素である  $K$  次元ベクトルを  $a$  で表す。このベクトルの  $J$  個の最大要素の添字集合を  $\Omega$  で表す。それら以外の要素をすべて 0 にしたベクトル  $a_\Omega$  が  $a$  の「よい近似」になっている場合、すなわち  $\|a_\Omega - a\|$  が「小さな値」になっている場合に  $a$  を圧縮可能であるといい、 $a_\Omega = a$  になっている場合に  $a$  を  $J$  スパースであるという。「よい近似」や「小さな値」というのはあいまいな表現であるが、誤差  $\|a_\Omega - a\|$  に依存した結果が得られることになる。

$J$  スパース信号の未知要素は、係数の値とその位置情報  $\Omega$  である。したがって、未知要素数は  $2J$  個となる。仮に  $2J \geq K$  である場合、スパース性を考えない場合の係数の個数  $K$  以上の未知要素を設定していることになり、スパース性を考える意味がない。そこで、 $J < K/2$  を仮定する。通常は  $K/2$  よりはるかに小さな  $J$  を想定していることが多い。その結果、 $2J$  個の未知要素を決定することが、 $K$  個の係数値を決定することよりも有利になる。

また、スパース性は理論的な仮説であり、現実の信号において完全に成立していることは考えにくい。しかし、画像圧縮技術に見られるように、信号を一部のベクトルのみを用いて近似的に表現することは可能である。したがって、圧縮可能性はより現実的な前提である。そこで、圧縮センシングの理論では、圧縮可能信号を扱うことを最終目標としながらも、スパース信号の取り扱いを中間目標として理論を構築している。

信号の観測を式 (3・2) でモデル化する．この場合の  $\psi_n$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ) を標準化ベクトルと呼ぶ．連続関数ではないことに注意する．標本値  $d_n$  が第  $n$  成分である  $N$  次元ベクトルを  $d$  で表す．内積  $\langle \varphi_k, \psi_n \rangle$  が第  $n$  行  $k$  列成分である  $N \times K$  行列を  $B$  で表せば，式 (3・2) に式 (3・16) を代入することにより次式を得る：

$$d = Ba \quad (3\cdot17)$$

この観測行列  $B$  を，圧縮センシングでは慣例的に辞書 (dictionary) と呼ぶことがある<sup>40)</sup>．列ベクトルを「語」と見立てて，その集合になっているからである．

さて， $N < K$  の場合を考えれば，式 (3・17) を満たす  $a$  は無限に存在する．これらの中で  $J$  スパースな解を一意に求めることが圧縮サンプリングで論じられる問題である．この問題を解決するために  $B$  に求められる条件は少なくとも，任意に選び出された  $J$  個の列ベクトルが 1 次独立であるということである．この条件が成立していれば， $B$  の  $J$  個の列ベクトルを順に選び出していき，得られた部分行列  $B_\Omega$  の値域  $\mathcal{R}(B_\Omega)$  に  $d$  が含まれているかどうかを判定し，含まれていれば Moore-Penrose 一般逆  $B_\Omega^\dagger$  を  $d$  に作用させることにより，解を求めることができる．しかし，この解法は  $K$  の増加と共に組合せ爆発を起こしてしまうので現実的ではない．そこで，次に述べる  $l_p$  最小化原理による解決法が考えられてきた．

### (3) $l_p$ 最小化原理

定数  $0 < p \leq 1$  に対して， $a = (a_0, a_1, \dots, a_{K-1})$  の非線形汎関数  $\|a\|_p$  を

$$\|a\|_p = \left( \sum_{k=0}^{K-1} |a_k|^p \right)^{1/p}$$

と定義する．また， $p = 0$  の場合には， $a$  の非零の要素数で  $\|a\|_0$  を定義する． $\|a\|_p$  は  $p = 1$  の場合には  $l_1$  ノルムとなるが， $0 < p < 1$  の場合には三角不等式が成立しないので，ノルムにならない．しかし， $\|a_1 + a_2\|_p \leq C(\|a_1\|_p + \|a_2\|_p)$  が成立するので ( $C$  は  $a_1, a_2$  によらない定数)，準ノルムになっている．また， $\|a\|_p^p$  は， $0 < p \leq 1$  の場合には  $\|a\|_p$  の  $p$  乗を意味するが， $p = 0$  の場合には  $\|x\|_0$  を意味することとする．この定義のもとに， $0 \leq p \leq 1$  なる定数を用いて定義される条件付最小化問題

$$a^* = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \|a\|_p \quad \text{s.t.} \quad B\hat{a} = d \quad (3\cdot18)$$

を考える．この問題の解  $a^*$  と正解  $a$  は一般には異なるが，場合によっては一致する．そのための観測行列  $B$  に関する条件を与えてくれる概念が，零空間特性及び制限付等長性である．

### (4) 零空間特性 (Null Space Property)

観測行列  $B$  の零空間  $N(B)$  の任意の非零元  $z$  及び  $|\Omega| \leq J$  なる任意の添え字集合  $\Omega$  に対して，

$$\|z_\Omega\|_p^p < \|z_\Omega\|_p^p \quad (3\cdot19)$$

が成立しているとき， $B$  は  $J$  階の零空間特性 (null space property of order  $J$ ) を満たすという．そしてこのとき，以下の定理が成立する．

定理 2 <sup>40)</sup> 観測行列  $B$  が  $J$  階の零空間特性を満たしているとき、任意の  $J$  スパースベクトルを式 (3.18) の解  $a^*$  として一意に復元できる。

スパース信号ではなく圧縮可能信号を扱う場合には、 $a^*$  が  $a$  に完全に一致することはない。そのような場合には  $a^*$  の  $a$  に対する誤差を評価することが重要になる。誤差の目安に用いられる値が、 $a_\Omega$  の  $a$  に対する誤差  $\|a_\Omega - a\|_p$  である。前者が後者の定数倍以下である場合、すなわち

$$\|a^* - a\|_p \leq C \|a_\Omega - a\|_p \quad (3.20)$$

である場合、 $l_p$  最小化は定数  $C$  と共に  $J$  階の事例最適であるという (instance optimal of order  $J$  with constant  $C$  for the  $l_p$  norm)。

事例最適性 (instance optimality) は以下のように頑健零空間特性 (robust null space property) に関係することが示されている <sup>41)</sup>。零空間特性を規定する不等式 (3.19) には、一般に多少の「隙間」がある。この隙間を埋める定数  $\sigma < 1$  を導入する。すなわち、任意の非零元  $z \in \mathcal{N}(B)$  及び  $|\Omega| \leq J$  なる任意の添え字集合  $\Omega$  に対して、

$$\|z_\Omega\|_p^p < \sigma \|z_{\Omega^c}\|_p^p \quad (3.21)$$

が成立しているとき、 $B$  は  $l_p$  ノルムに対して  $J$  階の頑健零空間特性を満たしていると呼ぶ (robust null space property of order  $J$  with constant  $\sigma < 1$  for the  $l_p$  norm)。また、このことを  $B \in \text{RobustNSP}(J, \sigma, p)$  と表記する。

定理 3 <sup>42)</sup> 観測行列  $B$  が頑健零空間特性を満たしているとき、すなわち  $B \in \text{RobustNSP}(J, \sigma, p)$  が成立しているとき、

$$\|a^* - a\|_p^p \leq 2 \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} \|a_\Omega - a\|_p^p \quad (3.22)$$

が成立する。

ベクトル  $a_\Omega$  は、 $a$  の  $J$  最大成分だけを用いた場合の最良近似である。その誤差の定数倍よりも、 $a^*$  の誤差が小さくなっているということが重要である。また、 $\|a_\Omega - a\|$  が小さい場合には、左辺の近似誤差も相応の小さな値になるのである。

### (5) 雑音データと制限付等長性

ここまでは、観測データ  $d$  に雑音が含まれない場合を論じてきた。一般には観測データには雑音が含まれており、その影響を考慮した場合の結果を説明する。ここでは加法的雑音  $e_n$  を考え、 $d_n$  に雑音が加わった値を  $y_n$  で表す： $y_n = d_n + e_n$ 。これらをベクトルで表現すれば、

$$y = Ba + e$$

となる。この場合には  $p = 1$  に限定されて、 $l_1$  ノルムを使った問題

$$a^* = \underset{a}{\operatorname{argmin}} \|a\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|y - Ba\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.23)$$

を考える<sup>43, 44)</sup>．ここで、 $\varepsilon$  は雑音の上限値であり、この値は既知であると仮定する．

このような場合に重要となる観測行列  $B$  の性質が制限付等長性である．任意の  $J$  スパースベクトル  $a$  に対して、

$$1 - \delta_J \leq \frac{\|Ba\|_2^2}{\|a\|_2^2} \leq 1 + \delta_J \quad (3 \cdot 24)$$

を満たす最小の  $\delta_J$  を  $B$  の制限付等長定数 (restricted isometry constant) と呼ぶ．また、この性質そのものを制限付等長性 (restricted isometry property) と呼ぶ<sup>44)</sup>．仮に  $a$  にスパース性を仮定しないで  $\delta_J = 0$  である場合は、 $B$  が通常の等長変換であることを意味する．スパース性を仮定して  $\delta_J$  が 0 に近い値であるということは、任意の  $J$  スパースベクトルに対して  $B$  が等長変換に近い振る舞いをすることを意味している．

定理 4<sup>41)</sup> 観測行列  $B$  に関して  $\delta_{2J} < \sqrt{2} - 1$  が成立し、雑音ベクトルが  $\|e\|_2 \leq \varepsilon$  を満たしているとき、問題 (3 \cdot 23) の解  $a^*$  は次式を満たす：

$$\|a^* - a\|_2 \leq C_0 J^{-1/2} \|a_\Omega - a\|_1 + C_1 \varepsilon \quad (3 \cdot 25)$$

ここで、 $C_0, C_1$  は以下のように定義される定数である：

$$C_0 = 2 \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\delta_{2J}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2J}}, \quad C_1 = \frac{4\sqrt{1 + \delta_{2J}}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2J}} \quad (3 \cdot 26)$$

制限付等長定数  $\delta_{2J}$  が  $\sqrt{2} - 1 = 0.414\dots$  より小さいという条件は、 $C_0$  と  $C_1$  が正であることを保証している．例えば、 $\delta_{2J} = 0.2$  である場合には、 $C_0$  はおよそ 4.2、 $C_1$  はおよそ 8.5 になる．このように、観測データに雑音が含まれる場合であっても、 $a^*$  が式 (3 \cdot 25) の意味で安定した解になっていることが重要である．

それでは、 $\delta_{2J} < \sqrt{2} - 1$  となる観測行列  $B$  とは一体どのようなものであろうか．実は、この条件を満たす  $B$  を見いだすことは決して簡単な問題ではない．Candes などは条件を満たす行列を生成する手法として、確率的な方法を提示している<sup>43)</sup>．例えば、 $R^N$  における単位超球上のベクトルを一樣ランダムに  $K$  個求め、それらを列ベクトルに用いることにより  $B$  を構成する．こうして生成された  $B$  は非常に高い確率で制限付等長条件を満たすのである．このほかに、制限付等長条件を満たす  $B$  を見いだす研究が「辞書デザイン」とのテーマで種々行われている．

実は、制限付等長条件が満たされているとき、頑健零空間特性が成立する．すなわち、 $\delta_{2J} < \sqrt{2} - 1$  であるとき、 $\sigma = \sqrt{2}\delta_{2J}/(1 - \delta_{2J})$  とおくことにより、式 (3 \cdot 21) が成立する<sup>41)</sup>．そして、式 (3 \cdot 22) の左辺に現れた定数  $2(1 + \sigma)/(1 - \sigma)$  にこの  $\sigma$  を代入すれば、式 (3 \cdot 26) の定数  $C_0$  になる．このように、頑健零空間特性に基づく議論と、制限付等長条件に基づく議論には密接な関係がある．また、それぞれに長所・短所がある．観測データに雑音が含まれない場合については、上記のように、制限付等長条件は頑健零空間特性の十分条件になっている．したがって、後者を用いて議論することが望ましい．一方、観測データに雑音が含まれている場合には、定理 4 が示しているように、制限付等長条件に基づく議論がより優れ

ているのである。

### (6) 実現例

ここまで述べてきた理論的成果を実現した例に、単画素カメラと呼ばれるものがある<sup>45)</sup>。このカメラの最も重要な点は、 $K$  画素の画像を撮像するために、 $N$  個のデータ ( $N < K$ ) のみを観測するという点である。観測対象画像の入射光は  $K$  個の微小な鏡からなる DMD (digital micro mirror device) 配列上に像を結び、反射光はレンズで集光されて受光素子に導かれる。それぞれの鏡は独立に方向を決めることができ、反射光を受光素子に向かわせるものと、向かわせないものになっている。前者が 1 に、後者が 0 に対応しており、観測行列  $B$  の 1 行を表すことになる。乱数発生装置 (RNG) で鏡の方向を制御することにより、観測対象画像と  $B$  の行ベクトルとの内積が受光素子で観測される電圧になる。これを  $N$  回繰り返して、得られたデータを  $l_1$  ノルム最小化原理によって再構成すれば、 $K$  画素の画像が得られるのである。

### 3-1-4 むすび

以上、1990 年代以降の標本化理論の成果を論じてきたが、紙面の都合で扱えなかったテーマが多々あることはご容赦頂きたい。最後に、標本化理論が近年再び活発に議論されるようになっている証左として、1995 年からは隔年で「標本化と応用に関する国際会議 (SampTA)」が開催され、また 2002 年には論文誌「信号・画像処理における標本化理論に関する国際ジャーナル (STSIP)」<sup>46)</sup> が発刊となっていることを申し添えたい。

#### 参考文献

- 1) C. Shannon, "Communications in the presence of noise," Proc. IRE, vol.37, pp.10-21, 1949.
- 2) E. Whittaker, "On the functions which are represented by the expansions of interpolation-theory," Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol.35, pp.181-194, 1915.
- 3) K. Ogura, "On a certain transcendental integral function in the theory of interpolation," Tohoku Math. Journal, vol.17, pp.64-72, 1920.
- 4) V. Kotelnikov, "On the carrying capacity of "either" and wire in telecommunications," Material for the first all-union conference on questions of communication (Russian), Izd. Red. Upr. Svyzai RSKA (Moscow), 1933.
- 5) 染谷勲, "波形伝送," 修教社, 東京, 1949.
- 6) H. Ogawa, "Sampling theory and Isao Someya: A historical note," Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP), vol.5, no.3, pp.247-256, 2006.
- 7) 小川英光, "標本化定理と染谷勲," 電子情報通信学会誌, vol.89, no.8, pp.771-773, 2006.
- 8) A. Jerri, "The Shannon sampling theorem - Its various extensions and applications: A tutorial review," Proc. IEEE, vol.65, no.11, pp.1565-1596, Nov. 1977.
- 9) P. Butzer, "A survey of the whittaker-shannon sampling theorem and some of its extensions," Journal of Mathematical Research & Exposition, vol.3, pp.185-212, 1983.
- 10) R. Marks II, "Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory," Springer-Verlag, New York, 1991.
- 11) A. Zayed, "Advances in Shannon's Sampling Theory," CRC Press, New York, 1993.
- 12) J. Higgins, "Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis : Foundations," Oxford University Press, Oxford, 1996.
- 13) 小川英光, "一般標本化定理," 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J71-A, no.2, pp.163-170, 1988.
- 14) H. Ogawa, "A generalized sampling theorem," Electronics and Communications in Japan, Part.3, vol.72, no.3, pp.97-105, 1989.

- 15) M. Unser, "Sampling—50 Years after Shannon," *Proc. IEEE*, vol.88, no.4, pp.569-587, Apr. 2000.
- 16) D. Luenberger, "Optimization by Vector Space Methods," Wiley, New York, 1969.
- 17) 山田功, "工学のための関数解析," サイエンス社, 東京, 2009.
- 18) T. Dvorkind, Y. Eldar, and E. Matusiak, "Nonlinear and non-ideal sampling: Theory and methods," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.56, no.12, pp.5874-5890, Dec. 2008.
- 19) P. Vandewalle, L. Sbaiz, J. Vandewalle, and M. Vetterli, "Super-resolution from unregistered and totally aliased signals using subspace methods," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.55, no.7, pp.3687-3703, July. 2007.
- 20) A. Hirabayashi and L. Condat, "A study on interlaced sampling with unknown offsets," *Proc. of European Signal Processing Conference 2008 (EUSIPCO2008)*, 2008. CD-ROM.
- 21) H. Ogawa and N. Berrached, "A theory of extended pseudo-biorthogonal bases," *IEICE Trans. on Information and Systems*, vol.E76-D, no.8, pp.890-897, 1993.
- 22) S. Mallat, "A wavelet tour of signal processing, Academic Press," San Diego, 1998.
- 23) 小川英光, "[講座] 信号と画像の復元 [3] - 最適復元のための射影フィルタ族 -," *電子情報通信学会誌*, vol.71, no.7, pp.739-748, 1988.
- 24) M. Unser, "Splines: A perfect fit for signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.16, no.6, pp.22-38, Nov. 1999.
- 25) A. Aldroubi and M. Unser, "Sampling procedures in function spaces and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theory," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol.15, no.1-2, pp.1-21, 1994.
- 26) M. Unser and A. Aldroubi, "A general sampling theory for nonideal acquisition devices," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.42, no.11, pp.2915-2925, Nov. 1994.
- 27) Y.C. Eldar, "Sampling and reconstruction in arbitrary spaces and oblique dual frame vectors," *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol.1, no.9, pp.77-96, 2003.
- 28) Y. Eldar and T. Werther, "General framework for consistent sampling in Hilbert spaces," *International Journal of Wavelets, Multiresolution, and Information Processing*, vol.3, no.3, pp.347-359, 2005.
- 29) A. Hirabayashi and M. Unser, "Consistent sampling and signal reconstruction," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.55, no.8, pp.4104-4115, Aug. 2007.
- 30) T. Dvorkind and Y. Eldar, "Robust and consistent sampling," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.16, no.9, pp.739-742, Sept. 2009.
- 31) A. Hirabayashi, "Consistent sampling and efficient signal reconstruction," *IEEE Signal Processing Letters*, vol.16, no.12, pp.1023-1026, Dec. 2009.
- 32) Y. Eldar and T. Dvorkind, "A minimum squared-error framework for generalized sampling," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.54, no.6, pp.2155-2167, June. 2006.
- 33) Y. Eldar and T. Michaeli, "Beyond bandlimited sampling," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol.26, no.3, pp.48-68, May 2009.
- 34) M. Vetterli, P. Marziliano, and T. Blu, "Sampling signals with finite rate of innovation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.50, no.6, pp.1417-1428, June 2002.
- 35) I. Maravic and M. Vetterli, "Sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation in the presence of noise," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.53, no.8, pp.2788-2805, Aug. 2005.
- 36) P. Dragotti, M. Vetterli, and T. Blu, "Sampling moments and reconstructing signals of finite rate of innovation: Shannon meets Strang-Fix," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.55, no.5, pp.1741-1757, May 2007.
- 37) T. Blu, P.L. Dragotti, M. Vetterli, P. Marziliano, and L. Coulot, "Sparse sampling of signal innovations," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.25, no.2, pp.31-40, March 2008.
- 38) L. Baboulaz and P. Dragotti, "Exact feature extraction using finite rate of innovation principles with an

- application to image super-resolution,” IEEE Trans. on Image Processing, vol.18, no.2, pp.281-298, Feb. 2009.
- 39) M. Unser and T. Blu, “Cardinal exponential splines: Part I—Theory and filtering algorithms,” IEEE Trans. on Signal Processing, vol.53, no.4, pp.1425-1438, April 2005.
  - 40) R. Gribonval and M. Nielsen, “Sparse representations in unions of bases,” IEEE Trans. on Information Theory, vol.49, no.12, pp.3320-3325, Dec. 2003.
  - 41) E.J. Candes, “The restricted isometry property and its implications for compressed sensing,” Comptes Rendus Mathematique, vol.346, no.9-10, pp.589- 592, 2008.
  - 42) M. Davies and R. Gribonval, “On  $l_p$  minimisation, instance optimality, and restricted isometry constants for sparse approximation,” Proc. of Sampling Theory and Applications 2009 (SampTA2009), 2009. CD-ROM.
  - 43) E. Candes and M. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” IEEE Signal Processing Magazine, vol.25, no.2, pp.21-30, March 2008.
  - 44) E. Candes and T. Tao, “Decoding by linear programming,” IEEE Trans. on Information Theory, vol.51, no.12, pp.4203-4215, Dec. 2005.
  - 45) D. Takhar, V. Bansal, M. Wakin, M. Duarte, D. Baron, J. Laska, K. Kelly, and R. Baraniuk, “A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micromirrors,” Proc. Computational Imaging IV at SPIE Electronic Imaging, San Jose, 2006.
  - 46) “<http://stsip.org/>.”