

## 1 群 ( 信号・システム ) - 5 編 ( 信号理論 )

## 6 章 カルマンフィルタ

( 執筆者：西山 清 ) [ 2009 年 3 月 受領 ]

**概要**

カルマンフィルタは 1960 年に R.E. Kalman \* によって線形フィルタリングと予測問題への新しいアプローチとして発表されて以来、様々な拡張が行われて来た。その代表が非線形システムへの拡張である。1970 年頃から状態の非線形関数の推定値近傍での線形近似に基づく拡張カルマンフィルタが広く用いられているが、最近になって非線形変換を受けた確率変数の統計量を近似する方法を用いたアンセンテッドカルマンフィルタや期待値計算にモンテカルロ法を用いたパーティクルフィルタが注目を集めている。また、外乱 ( 初期状態、システム雑音、観測雑音 ) やモデル誤差に対するロバスト性の向上を目指した  $H^\infty$  フィルタも考案されている。

**【本章の構成】**

本章では、6-1 節で線形状態空間モデルにおける状態の推定と予測の一般式を求めた後、その結果を用いてカルマンフィルタを導出する。6-2 節ではカルマンフィルタの非線形システムへの拡張として、拡張カルマンフィルタ、アンセンテッドカルマンフィルタ、パーティクルフィルタについて順次説明する。最後に、6-3 節で  $H^\infty$  フィルタについて述べる。

---

\* Rudolf Emil Kalman は 1930 年にハンガリーのブタペストで生まれ、1957 年コロンビア大学より博士号を授与された後、IBM 研究所、スタンフォード大学を経て、1971 年にフロリダ大学教授、1973 年からはスイス連邦工科大学教授。IEEE Medal of Honor (1974)、第 1 回京都賞 (1985) など受賞多数。

## 1 群 - 5 編 - 6 章

## 6-1 カルマンフィルタ

(執筆者：西山 清)[2009年3月受領]

Kalman は任意の相関性をもつ有色信号が白色雑音を入力とする線形動的システムの出力として表現できることに着目し、信号の生成過程まで立ち入ってモデル化した。これによって、ウィナーフィルタの制約条件である定常性と無限時間観測の仮定を取り除いた画期的な最適フィルタ(フィルタリング理論)を導くことに成功した<sup>1)</sup>。これはウィナーフィルタでは出来なかった非定常な時系列のフィルタリングを可能とし、後にカルマンフィルタ(Kalman filter)\* と呼ばれるようになる。このカルマンフィルタは、信号の生成過程のモデル化の際に導入された状態変数の最適な推定値(最小分散推定値)を観測信号を用いて逐次求めるアルゴリズムとして導かれている。すなわち、時刻  $t_k$  までの観測信号  $y_0, \dots, y_k$  と信号生成に関わる線形動的システムを用いて、ある時刻  $t_{k'}$  のシステムの状態  $x_{k'}$  の最小分散推定量  $\hat{x}_{k'|k}$  をカルマンフィルタは求めている。このように信号の生成過程までモデル化した点が同じように統計的処理を行なうウィナーフィルタや適応フィルタと大きく異なる点である。特に、状態変数と云った概念を導入したことが後のカルマンフィルタの発展に大きく寄与することになる。実際、カルマンフィルタは、航空・宇宙工学、制御工学、通信工学を初め、情報工学、土木工学、医学、社会・経済学など様々な分野に現在まで幅広く応用されている<sup>3)-10)</sup>。また、カルマンフィルタによる推定問題は時刻  $t_k$  を現在と考えれば、推定すべき状態  $x_{k'}$  と観測  $Y_k = [y_0, \dots, y_k]$  の時間的關係から、1) 未来の状態  $x_{k'} (k' > k)$  の推定値  $\hat{x}_{k'|k}$  を求める予測(prediction)問題、2) 現在の状態  $x_k (k' = k)$  の推定値  $\hat{x}_{k|k}$  を求める濾波(filtering)問題、3) 過去の状態  $x_{k'} (k' < k)$  の推定値  $\hat{x}_{k'|k}$  を求める平滑(smoothing)問題の三つに分類できる。本章ではフィルタリング問題を中心に述べるが、カルマンフィルタによる予測や平滑も比較的容易に導かれる<sup>8)</sup>。

まず、最初にカルマンフィルタリング問題を定義し、その解を求めるカルマンフィルタの導出の基礎となる状態空間モデルと状態の条件付き確率密度関数について述べる。次に、これらの結果を用いて最も簡便と思われる方法によってカルマンフィルタを導くことにする。

## (1) カルマンフィルタリング問題とその解

カルマンフィルタを導出する前に改めて問題設定を明確にしておくことにする。

## [カルマンフィルタリング問題]

次の離散時間の線形状態空間モデル

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k \quad (\text{状態方程式}) \quad (6.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k, \quad k \geq 0 \quad (\text{観測方程式}) \quad (6.2)$$

において、初期状態  $x_0$ 、システム雑音(プロセス雑音) $\{w_k\}$ 、観測雑音  $\{v_k\}$  が

$$E\{w_k\} = \mathbf{0}, \quad E\{v_k\} = \mathbf{0}, \quad E\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad E\{[x_0 - \bar{x}_0][x_0 - \bar{x}_0]^T\} = \Sigma_{x_0}$$

\* Kalman は離散時間カルマンフィルタ<sup>1)</sup>を導出した後、Bucy と共に連続時間カルマンフィルタ<sup>2)</sup>を導出している。

$$\begin{aligned} E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k'}^T & \mathbf{v}_{k'}^T \end{bmatrix}\right\} &= \begin{bmatrix} E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k'}^T\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k'}^T\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{w}_k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{v}_k} \end{bmatrix} \delta_{kk'}, \quad \Sigma_{\mathbf{v}_k} > 0 \end{aligned}$$

$$E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{w}_k^T\} = \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{0} \quad (6 \cdot 3)$$

を満たし、かつガウス性であると仮定する。ただし、 $\{F_k\}, \{G_k\}, \{H_k\}, \bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_{\mathbf{x}_0}, \{\Sigma_{\mathbf{w}_k}\}, \{\Sigma_{\mathbf{v}_k}\}$  は事前に既知とする。また、 $E\{\cdot\}$  は期待値、 $^T$  は転置、 $\delta_{kk'}$  はクロネッカーのデルタをそれぞれ表し、 $\Sigma_{\mathbf{v}_k} > 0$  は行列  $\Sigma_{\mathbf{v}_k}$  が正定であることを示す。

このとき、平均 2 乗誤差  $E\{\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|^2 | \mathbf{Y}_k\}$  を最小とする  $\mathbf{x}_k$  の最小分散推定値\*

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (6 \cdot 4)$$

を求める問題を考える。この問題をカルマンフィルタリング問題 (Kalman filtering problem) といい、その解を求めるアルゴリズムをカルマンフィルタ (Kalman filter: KF) と呼ぶ。

カルマンフィルタの導出には次に示す状態の推定と予測が必要となる。

## (2) 状態の推定と予測の一般式

### (a) 状態の推定

状態の推定は  $\mathbf{Y}_k$  が与えられたときの  $\mathbf{x}_k$  の条件付き確率密度関数を用いる。この条件付き確率密度関数は状態空間モデルを考慮すれば次のように整理できる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \cdot \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) \cdot \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \cdot \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) / p(\mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) / p(\mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \end{aligned} \quad (6 \cdot 5)$$

ここで  $\{\mathbf{x}_k\}$  のマルコフ性、 $\mathbf{x}_k$  と  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^{k-1}$  の独立性および  $\{\mathbf{v}_k\}$  の白色性より得られる  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  の関係を用いた。

### (b) 状態の予測

状態の予測は  $\mathbf{Y}_k$  が与えられたときの  $\mathbf{x}_{k+1}$  の条件付き確率密度関数を用いる。この条件付き確率密度関数は次のように整理できる。

\* 最小分散推定値  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  は  $\mathbf{Y}_k$  が与えられたときの  $\mathbf{x}_k$  の条件付き期待値  $E\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\}$  と一致する<sup>(4),(8),(9)</sup>。また、 $\int \xi_k p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k}(\xi_k | \mathbf{Y}_k) d\xi_k$  を  $\int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k$  と略記した。

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) &= \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{Y}_k)} = \frac{\int p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k}{p(\mathbf{Y}_k)} \\
&= \int \frac{p(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k)} \cdot \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{Y}_k)} d\mathbf{x}_k \\
&= \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \\
&= \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \tag{6.6}
\end{aligned}$$

ここで、 $v_k$  と  $F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{w}_k$  の独立性より得られる  $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$  の関係を用いた。

### (3) ガウス性を考慮した状態の推定と予測

ガウス性の仮定は式 (6.5) と式 (6.6) の計算を容易にするだけでなく、式 (6.4) の最小分散推定値をガウス分布の表現から直接求めることを可能とする。

#### (a) 状態の推定

$\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_k$  および  $v_k$  のガウス性から

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)\right\} \\
p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1}) &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})\right\}
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = E\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1}\}$ 、 $\hat{\Sigma}_{k|k-1} = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T|\mathbf{Y}_{k-1}\}$  であり、 $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$ 、 $\hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0}$  とする。これより、式 (6.5) の分子  $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1})$  の指数部は以下のように整理できる。

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \\
&= (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\
&\quad + [(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) - \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})]^T \Sigma_{v_k}^{-1} [(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) - \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})] \\
&= (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T (\hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1} \mathbf{H}_k) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\
&\quad + (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\
&\quad - (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) - (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T \Sigma_{v_k}^{-1} \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\
&= [(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})]^T \hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} \\
&\quad [(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})] \\
&\quad + (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T (\Sigma_{v_k}^{-1} - \Sigma_{v_k}^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1}) (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\
&= (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T (\Sigma_{v_k} + \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})
\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_{v_k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}), \quad \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\
&= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\Sigma_{v_k} + \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \tag{6.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{k|k} &= (\hat{\Sigma}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k \Sigma_{v_k}^{-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} \\
&= \hat{\Sigma}_{k|k-1} - \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{v_k})^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \tag{6.8}
\end{aligned}$$

一方、式 (6.5) の分母は

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T (\boldsymbol{\Sigma}_{v_k} + \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})\right\}$$

となる。

以上より、 $\mathbf{Y}_k$  が与えられたときの  $\mathbf{x}_k$  の条件付き確率密度関数は次のように整理できる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})\right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

これより、上式の指数部から  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k}$  が  $\mathbf{x}_k$  の最小分散推定値とその共分散行列であることがわかる (確率密度関数の正規化項は  $\mathbf{x}_k$  の最小分散推定値を求めるためには重要でない)。

#### (b) 状態の予測

$\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{w}_k$  および  $\mathbf{v}_k$  が互いに独立であることに注意して状態方程式の両辺に期待値  $E\{\cdot | \mathbf{Y}_k\}$  をとれば

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (6.10)$$

となり、その共分散行列は次式となる。

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_{w_k} \mathbf{G}_k^T \quad (6.11)$$

さらにガウス性を考慮すれば、式 (6.10) と式 (6.11) より  $\mathbf{Y}_k$  が与えられたときの  $\mathbf{x}_{k+1}$  の条件付き確率密度関数が直ちに得られる。

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{Y}_k) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})\right\} \quad (6.12)$$

#### (4) カルマンフィルタの導出

ガウス性を考慮した状態の推定 (式 (6.7)、式 (6.8)) と予測 (式 (6.10)、式 (6.11)) を繰り返して用いることによって良く知られたカルマンフィルタのアルゴリズムが得られる。

[カルマンフィルタ]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \end{aligned} \quad (\text{フィルタ方程式}) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_{v_k})^{-1} \quad (\text{カルマンゲイン}) \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_{w_k} \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (\text{誤差の共分散行列方程式}) \quad (6.15)$$

ただし、初期値は

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0|-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{x_0} \quad (\text{初期値}) \quad (6.16)$$

と設定する。このとき、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k}$  は  $y_0, \dots, y_k$  と無関係なので無条件の共分散行列と一致し、 $E\{\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|^2\} = \text{tr}\{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k}\}$  の関係式が成り立つことに注意されたい。ただし、 $\text{tr}\{\cdot\}$  は行列のト

レースを表す。

以上より,  $x_0, \{w_k\}, \{v_k\}$  の平均ベクトル  $\bar{x}_0$  (通常  $\bar{w}_k = \bar{v}_k = \mathbf{0}$ ) と共分散行列  $\Sigma_{x_0}, \Sigma_{w_0}, \dots, \Sigma_{w_k}, \Sigma_{v_0}, \dots, \Sigma_{v_k}$ , および観測値  $y_0, \dots, y_k$  が与えられれば, カルマンフィルタによって平均 2 乗誤差を最小とする状態の最小分散推定値  $\hat{x}_{0|0}, \dots, \hat{x}_{k|k}$  とその誤差の共分散行列  $\hat{\Sigma}_{0|0}, \dots, \hat{\Sigma}_{k|k}$  を逐次求めることができる\*。これは時々刻々と変化する  $x_k$  の条件付き確率密度関数  $N(x_k; \hat{x}_{k|k}, \hat{\Sigma}_{k|k})$  を求めていることになる。ただし,  $N(\cdot)$  はガウス分布を表す。

また, 制御の分野などでは外部入力  $u_k$  として制御入力加わる状態空間モデルが必要となる。

$$x_{k+1} = F_k x_k + D_k u_k + G_k w_k \quad (\text{状態方程式}) \quad (6 \cdot 17)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (\text{観測方程式}) \quad (6 \cdot 18)$$

このときのカルマンフィルタを次式に示す<sup>8), 9)</sup>。

[外部入力をもつカルマンフィルタ]

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k} + D_k u_k \quad (\text{フィルタ方程式}) \quad (6 \cdot 19)$$

$$K_k = \hat{\Sigma}_{k|k-1} H_k^T (H_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} H_k^T + \Sigma_{v_k})^{-1} \quad (\text{カルマンゲイン}) \quad (6 \cdot 20)$$

$$\hat{\Sigma}_{k|k} = \hat{\Sigma}_{k|k-1} - K_k H_k \hat{\Sigma}_{k|k-1}$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = F_k \hat{\Sigma}_{k|k} F_k^T + G_k \Sigma_{w_k} G_k^T \quad (\text{誤差の共分散行列方程式}) \quad (6 \cdot 21)$$

ただし,

$$\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0, \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{x_0} \quad (\text{初期値}) \quad (6 \cdot 22)$$

\* ガウス性が成り立たない場合でもカルマンフィルタは線形フィルタの中で最適になる<sup>9)</sup>。

## 1 群 - 5 編 - 6 章

## 6-2 カルマンフィルタの拡張

(執筆: 西山 清) [2009 年 3 月受領]

本節では、カルマンフィルタを非線形状態空間モデルで表されるシステムの状態推定にも適用できるように拡張する。

## (1) 拡張カルマンフィルタ

現実の問題ではシステムが線形であるより、非線形である場合の方が多い\*。このような非線形システムに対してもカルマンフィルタを適用したいが、そのままでは利用できない。しかし、工夫することにより、次の非線形状態空間モデル

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k)\mathbf{w}_k \quad (6\cdot23)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad k \geq 0 \quad (6\cdot24)$$

に対しても近似的にカルマンフィルタを適用することができる。ただし、 $\mathbf{f}_k(\cdot)$ 、 $\mathbf{g}_k(\cdot)$ 、 $\mathbf{h}_k(\cdot)$  はベクトル値非線形関数であり、 $\mathbf{x}_0$ 、 $\{\mathbf{w}_k\}$ 、 $\{\mathbf{v}_k\}$  は式 (6\cdot3) を満たすものとする。

まず、 $\mathbf{x}_k$  の推定値  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 、 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  を既知とし、その推定値の近傍で  $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k)$ 、 $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)$  をそれぞれ次のようにテイラー展開 (Taylor expansion) する。

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \mathbf{F}_k[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + \dots \quad (6\cdot25)$$

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + \dots \quad (6\cdot26)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_k(\boldsymbol{\xi}_k)}{\partial \boldsymbol{\xi}_k^T} \right|_{\boldsymbol{\xi}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\xi}_k)}{\partial \boldsymbol{\xi}_k^T} \right|_{\boldsymbol{\xi}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}} \quad (6\cdot27)$$

ここで、 $\boldsymbol{\xi}_k$  はベクトルであり、ベクトルによる微分に関しては文献<sup>9)</sup>などを参照されたい。

次に、 $\mathbf{G}_k = \mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})$  と改めて定義し、テイラー展開の 1 次の項までを採用して、式 (6\cdot23) と式 (6\cdot24) に代入すればそれぞれ次式を得る。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) + \mathbf{F}_k[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \quad (6\cdot28)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] + \mathbf{v}_k \quad (6\cdot29)$$

さらに、上式を整理すると次の線形状態空間モデルが得られる。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \quad (6\cdot30)$$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (6\cdot31)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}) - \mathbf{F}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (6\cdot32)$$

\* 関数  $f(\cdot)$  が任意の定数  $a, b$  に対して、 $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$  を満たすとき、 $f(\cdot)$  は線形関数といい、それを満たさないとき非線形関数という。

これは外部入力を受ける状態空間モデル ( $D_k = I, u_k = f_k(\hat{x}_{k|k}) - F_k \hat{x}_{k|k}$ ) であるから, これに式 (6.19) ~ 式 (6.22) のカルマンフィルタを適用し整理すれば, 式 (6.23) と式 (6.24) の非線形状態空間モデルに対するカルマンフィルタが次のように得られる<sup>4), 8), 9)</sup>.

[拡張カルマンフィルタ]

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1})) \\ \hat{x}_{k+1|k} &= f_k(\hat{x}_{k|k})\end{aligned}\quad (\text{フィルタ方程式}) \quad (6.33)$$

$$K_k = \hat{\Sigma}_{k|k-1} H_k^T (H_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} H_k^T + \Sigma_{v_k})^{-1} \quad (\text{カルマンゲイン}) \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{k|k} &= \hat{\Sigma}_{k|k-1} - K_k H_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \\ \hat{\Sigma}_{k+1|k} &= F_k \hat{\Sigma}_{k|k} F_k^T + G_k \Sigma_{w_k} G_k^T\end{aligned}\quad (\text{誤差の共分散行列方程式}) \quad (6.35)$$

ただし,

$$\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{x_0} \quad (\text{初期値}) \quad (6.36)$$

これを拡張カルマンフィルタ (extended Kalman filter: EKF) といい, 式 (6.23) と式 (6.24) で表される非線形システムに対する準最適フィルタとなるが, 非常に強力な推定アルゴリズムである. ここで, 拡張カルマンフィルタはカルマンフィルタのアルゴリズムと一見似ているが  $F_k, G_k, H_k$  は  $\hat{x}_{k|k}, \hat{x}_{k|k-1}$  の関数であるため, 通常のカルマンフィルタのように  $\hat{\Sigma}_{k|k}$  および  $K_k$  をオフラインで計算することはできない. また, 拡張カルマンフィルタはシステムの局所的な線形化を行っているので, 初期値  $\hat{x}_{0|-1}$  の与え方がフィルタの収束性に大きく影響を与える. 最悪の場合, フィルタは発散するので, 状態の初期値の設定には十分な注意が必要である.

## (2) アンセンテッドカルマンフィルタ

アンセンテッドカルマンフィルタ (unscented Kalman filter: UKF) は, 関数の線形近似を用いる代わりに, 非線形変換を受けた確率変数の統計量を近似的に求める手法 (アンセンテッド変換 (unscented transformation: UT)) を用いることによって推定精度の向上を図っている<sup>5), 6), 10)</sup>. このカルマンフィルタは次の非線形状態空間モデルで表されるシステムに適用できる\*.

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (6.37)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (6.38)$$

ここで,  $x_k \in \mathcal{R}^{N_x}$  はシステムの状態を表し,  $y_k \in \mathcal{R}^{N_y}$  は観測値,  $w_k \in \mathcal{R}^{N_w}$ ,  $v_k \in \mathcal{R}^{N_v}$  はシステム雑音と観測雑音であり, それぞれ式 (6.3) を満たし, 確率分布は平均値を中心に対称であることが望ましい<sup>10)</sup>. また, 写像  $f: \mathcal{R}^{N_x} \times \mathcal{R}^{N_w} \mapsto \mathcal{R}^{N_x}$  と  $h: \mathcal{R}^{N_x} \times \mathcal{R}^{N_v} \mapsto \mathcal{R}^{N_y}$  は状態の

\* 次のような加法的雑音をもつモデルに限定するとアンセンテッドカルマンフィルタは簡略化できる<sup>6), 10)</sup>.

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + g(x_k)w_k, \quad y_k = h_k(x_k) + v_k$$



動的モデルと観測モデルを表す .

アンセンテッドカルマンフィルタは拡張カルマンフィルタと比べて非線形変換を受けた状態の平均ベクトルや共分散行列をより正確に求められるので、システムの非線形が強い場合に有効になる .

アンセンテッド変換は次のように拡大された状態ベクトルの平均ベクトルと共分散行列をシグマポイントと呼ばれる平均値回りの代表点を用いて近似的に計算する .

$$\mathbf{x}_k^a = [\mathbf{x}_k^T \mathbf{w}_k^T \mathbf{v}_k^T]^T \quad (6\cdot39)$$

ここでは表記を簡単にするため、上記の状態ベクトルのシグマポイントを  $2N_a + 1$  個並べた  $N_a \times (2N_a + 1)$  のシグマ行列  $\mathcal{X}_k^a = [(\mathcal{X}^x)^T (\mathcal{X}^w)^T (\mathcal{X}^v)^T]^T$  を用いる . ただし ,  $N_a = N_x + N_w + N_v$  であり ,  $N_x, N_w, N_v$  は状態 , システム雑音 , 観測雑音の次元をそれぞれ表す .

以下にアンセンテッドカルマンフィルタの計算手順を示す .

[アンセンテッドカルマンフィルタ]

1. 初期化:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_0^a &= E\{\mathbf{x}_0^a\} = [\bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{0}^T \mathbf{0}^T]^T \\ \bar{\Sigma}_0^a &= E\{(\mathbf{x}_0^a - \bar{\mathbf{x}}_0^a)(\mathbf{x}_0^a - \bar{\mathbf{x}}_0^a)^T\} = \begin{bmatrix} \Sigma_{x_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Sigma_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで ,  $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$  は定常と仮定し , 式 (6\cdot3) の条件を満たすものとする .

2. For  $k = 1, 2, \dots$

(a) シグマポイントの計算:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{k-1}^a &= [\bar{\mathbf{x}}_{k-1}^a, \\ &\quad \{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}^a - \left(\sqrt{(N_a + \lambda)\bar{\Sigma}_{k-1}^a}\right)_i\}_{i=1}^{N_a}, \\ &\quad \{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \left(\sqrt{(N_a + \lambda)\bar{\Sigma}_{k-1}^a}\right)_i\}_{i=1}^{N_a}] \end{aligned}$$

ただし ,  $k > 1$  に対して

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^T \mathbf{0}^T \mathbf{0}^T]^T, \quad \bar{\Sigma}_{k-1}^a = \text{diag}\{\hat{\Sigma}_{k-1|k-1}, \Sigma_w, \Sigma_v\}$$

とし ,  $\left(\sqrt{(N_a + \lambda)\bar{\Sigma}_{k-1}^a}\right)_i$  は  $N_a \times N_a$  行列  $\sqrt{(N_a + \lambda)\bar{\Sigma}_{k-1}^a}$  の第  $i$  列ベクトルを表し ,  $\text{diag}\{\cdot\}$  は対角ブロック行列を表す . また ,  $\lambda$  は正のパラメータである .

(b) 時間更新 (予測):

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x &= f_{k-1}(\mathcal{X}_{i,k-1}^x, \mathcal{X}_{i,k-1}^w), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2N_a \\
\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2N_a} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,k|k-1}^x \\
\bar{\Sigma}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2N_a} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}] [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}]^T \\
\mathcal{Y}_{i,k|k-1} &= \mathbf{h}_k(\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x, \mathcal{X}_{i,k-1}^v), \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2N_a \\
\bar{\mathbf{y}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2N_a} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_{i,k|k-1}
\end{aligned}$$

ただし,  $\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x$ ,  $\mathcal{Y}_{i,k|k-1}$  は  $\mathcal{X}_{k|k-1}^x$ ,  $\mathcal{Y}_{k|k-1}$  の第  $i+1$  列ベクトルをそれぞれ表す .  
 また,  $W_i^{(m)}$ ,  $W_i^{(c)}$  は重みであり, 次のように設定される .

$$\begin{aligned}
W_0^{(m)} &= \lambda / (N_a + \lambda), \quad W_0^{(c)} = \lambda / (N_a + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta) \\
W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = 1 / \{2(N_a + \lambda)\}, \quad i = 1, \dots, 2N_a
\end{aligned}$$

ここで,  $\alpha, \beta$  は正のパラメータである .

(c) 観測更新 (推定) \*:

$$\begin{aligned}
\bar{\Sigma}_{\mathbf{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2N_a} W_i^{(c)} [\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \bar{\mathbf{y}}_{k|k-1}] [\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \bar{\mathbf{y}}_{k|k-1}]^T \\
\bar{\Sigma}_{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k} &= \sum_{i=0}^{2N_a} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,k|k-1}^x - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1}] [\mathcal{Y}_{i,k|k-1} - \bar{\mathbf{y}}_{k|k-1}]^T \\
\mathbf{K}_k &= \bar{\Sigma}_{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k} \bar{\Sigma}_{\mathbf{y}_k}^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_{k|k-1}) \\
\hat{\Sigma}_{k|k} &= \bar{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \bar{\Sigma}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{K}_k^T
\end{aligned}$$

アンセンテッドカルマンフィルタはシグマポイントを求める際に平方根行列の計算が必要となる . この計算にはコレスキー法などが知られている . MATLAB では chol() が用意されているので直ちに計算できる .

\*  $\hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\Sigma_{\mathbf{v}_k} + \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} = \text{E}\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T | \mathbf{Y}_{k-1}\} \text{E}\{(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T | \mathbf{Y}_{k-1}\}^{-1}$ ,  
 $\hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} = \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k}) \mathbf{K}_k^T = \mathbf{K}_k \text{E}\{(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1})^T | \mathbf{Y}_{k-1}\} \mathbf{K}_k^T$   
 に注意されたい .

## (3) パーティクルフィルタ

条件付き期待値  $E\{x_k|Y_k\} = \int x_k p(x_k|Y_k) dx_k$  における積分を  $p(x_k|Y_k)$  に類似した既知の分布から取り出されたサンプルの加重平均で近似できれば状態の最小分散推定値は容易に求められる。このアイデアに基づいたフィルタがパーティクルフィルタ (particle filter: PF) であり、非ガウスかつ非線形システムの推定に適している<sup>5),6)</sup>\*。パーティクルフィルタは次の非ガウスかつ非線形状態空間モデルで表されるシステムに適用できる。

$$x_{k+1} = f_k(x_k, w_k) \quad (6\cdot40)$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (6\cdot41)$$

ここで、システムの状態  $x_k$ 、観測値  $y_k$ 、システム雑音  $w_k$ 、観測雑音  $v_k$  は式 (6\cdot3) を満たし、確率分布は任意でよい。また、写像  $f: \mathcal{R}^{N_x} \times \mathcal{R}^{N_w} \mapsto \mathcal{R}^{N_x}$  と  $h: \mathcal{R}^{N_x} \times \mathcal{R}^{N_v} \mapsto \mathcal{R}^{N_y}$  は状態の動的モデルと観測モデルを表す。

パーティクルフィルタは、 $Y_k = [y_1, \dots, y_k]$  が与えられたときの状態  $x_k$  の事後確率密度関数  $p(x_k|Y_k)$  をある既知の分布  $q$  に従ってランダムに取り出されたサンプル  $x_k^{(i)}$  (パーティクル) によって表し、これに基づいて状態の推定値  $E\{x_k|Y_k\}$  を求めている。まず、 $X_k = [x_0, \dots, x_k]$  の条件付き期待値  $E\{X_k|Y_k\}$  を次のように整理する。

$$\begin{aligned} E\{X_k|Y_k\} &= \int X_k p(X_k|Y_k) dX_k \\ &= \int X_k \frac{p(X_k|Y_k)}{q(X_k|Y_k)} q(X_k|Y_k) dX_k \\ &= \int X_k \frac{p(Y_k|X_k)p(X_k)}{p(Y_k)q(X_k|Y_k)} q(X_k|Y_k) dX_k \\ &= \frac{\int W_k X_k q(X_k|Y_k) dX_k}{p(Y_k)} \end{aligned} \quad (6\cdot42)$$

ただし、

$$W_k = \frac{p(Y_k|X_k)p(X_k)}{q(X_k|Y_k)} \quad (6\cdot43)$$

は重要度重み (importance weight) と呼ばれ、 $q(X_k|Y_k)$  は提案分布 (proposal distribution) と呼ばれる。このとき、

$$\begin{aligned} p(Y_k) &= \int \frac{p(Y_k|X_k)p(X_k)}{q(X_k|Y_k)} q(X_k|Y_k) dX_k \\ &= E_q\{W_k|Y_k\} \\ &\approx \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} W_k^{(i)}, \quad W_k^{(i)} = \frac{p(Y_k|X_k^{(i)})p(X_k^{(i)})}{q(X_k^{(i)}|Y_k)}, \quad X_k^{(i)} \sim q(X_k|Y_k) \end{aligned} \quad (6\cdot44)$$

に注意すれば、式 (6\cdot42) は次のように表すことができる<sup>†</sup>。

\* パーティクルフィルタは一般に状態のダイナミクスが確定的な場合 ( $w_k = \mathbf{0}$ ) には適さない。

† これは数値積分のモンテカルロ (Monte Carlo: MC) 法に対応する。MC 法は  $g(x) = f(x)\pi(x)$  と分解する確率密度関数  $\pi(x)$  に従って取り出されたサンプル  $x^{(i)} \sim \pi(x)$  を用いて積分を  $\int g(x)dx \approx \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} f(x^{(i)})$  のように求める。

$$E\{X_k|Y_k\} = \frac{E_q\{W_k X_k|Y_k\}}{E_q\{W_k|Y_k\}} \approx \frac{\frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} W_k^{(i)} X_k^{(i)}}{\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} W_k^{(j)}} \quad (6.45)$$

この最後の式は条件付き確率密度関数が

$$p(X_k|Y_k) \approx \sum_{i=1}^{N_s} W_k^{(i)} \delta(X_k - X_k^{(i)}) \quad (6.46)$$

であることを意味する。ここで、 $N_s$  はパーティクルの数であり、 $\delta(\cdot)$  はディラックのデルタ関数を表す。また、 $W_k^{(i)}$  は正規化された重要度重みであり、次式で与えられる。

$$\underline{W}_k^{(i)} = \frac{W_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_s} W_k^{(j)}} \quad (6.47)$$

ただし、

$$W_k^{(i)} = \frac{p(Y_k|X_k^{(i)})p(X_k^{(i)})}{q(X_k^{(i)}|Y_k)} = \frac{p(Y_k)p(X_k^{(i)}|Y_k)}{q(X_k^{(i)}|Y_k)} \quad (6.48)$$

ここで、各パーティクル  $X_k^{(i)}$  は提案分布  $q(X_k|Y_k)$  に従ってランダムにサンプリングされる。ゆえに、提案分布の選択はパーティクルフィルタの設計において最も重要な要素の一つである。もし、提案分布が

$$q(X_k|Y_k) = q(x_k|X_{k-1}, Y_k)q(X_{k-1}|Y_{k-1}) \quad (6.49)$$

のように分解できれば、 $X_{k-1}^{(i)} \sim q(X_{k-1}|Y_{k-1})$  に新しい状態\*

$$x_k^{(i)} \sim q(x_k|X_{k-1}^{(i)}, Y_k)$$

を付け加えることによって  $X_k^{(i)} = [X_{k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}] \sim q(X_k|Y_k)$  が得られる。

一方、式 (6.40) と式 (6.41) を用いれば、 $p(X_k|Y_k)$  は最終的に  $p(X_{k-1}|Y_{k-1})$ 、 $p(y_k|x_k)$  および  $p(x_k|x_{k-1})$  を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} p(X_k|Y_k) &= \frac{p(y_k|X_k, Y_{k-1})p(X_k|Y_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})} \\ &= \frac{p(y_k|X_k, Y_{k-1})p(x_k|X_{k-1}, Y_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})} p(X_{k-1}|Y_{k-1}) \\ &= \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|x_{k-1})}{p(y_k|Y_{k-1})} p(X_{k-1}|Y_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

これと式 (6.49) を式 (6.48) の最終式に代入すれば、重要度重みを求める再帰式が得られる。

\*  $x_k^{(i)} \sim q(x_k|X_{k-1}^{(i)}, Y_k)$  は  $x_k^{(i)}$  が確率密度関数  $q(x_k|X_{k-1}^{(i)}, Y_k)$  に従って取り出されたサンプルであることを意味する。

$$\begin{aligned}
 W_k^{(i)} &= \frac{p(\mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{Y}_{k-1})} \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})p(\mathbf{X}_{k-1}^{(i)}|\mathbf{Y}_{k-1})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_k)q(\mathbf{X}_{k-1}^{(i)}|\mathbf{Y}_{k-1})} \\
 &= W_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{X}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{Y}_k)} \quad (6.51)
 \end{aligned}$$

さらに,  $q(\mathbf{x}_k|\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_k) = q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)$  と仮定すれば最終的に次式を得る。

$$W_k^{(i)} = W_{k-1}^{(i)} \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k^{(i)})p(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)}|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k)}, \quad \mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) \quad (6.52)$$

通常, 提案分布は, 1)  $q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$  (マルコフ連鎖) と仮定するか\*, 2)  $q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\Sigma}_k)$  と仮定して拡張カルマンフィルタ (EKF) やアンセンテッドカルマンフィルタ (UKF) によって逐次更新される。ただし,  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\Sigma}_k)$  は平均ベクトル  $\bar{\mathbf{x}}_k$ , 共分散行列  $\bar{\Sigma}_k$  のガウス分布を表す。

以上より, 式 (6.46) を利用して  $\mathbf{x}_k$  の事後確率密度関数  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$  を

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) \approx \sum_{i=1}^{N_s} W_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}), \quad \mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{y}_k) \quad (6.53)$$

のように近似すれば, 状態  $\mathbf{x}_k$  の推定値  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  は式 (6.52) で求めた重要度重みとデルタ関数の性質 ( $\int \mathbf{g}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)})d\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(i)})$ ) から直ちに得られる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k\} = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \approx \sum_{i=1}^{N_s} W_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)} \quad (6.54)$$

さらに, 特定の一つのパーティクルに重みが集中する退化現象を避けるため,  $P\{\mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(j)}\} = W_k^{(j)}$  となるようにリサンプリング<sup>†</sup>, 新しいパーティクル  $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}$  を生成する方法が用いられる。すなわち, パーティクル  $\mathbf{x}_k^{(j)}$  は自分と同じ統計的性質をもつ約  $N_s \cdot W_k^{(j)}$  個の子パーティクル  $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}$  をもつ。このとき, 子パーティクルの重要度重みは  $W_{k-1}^{(i)} = 1/N_s$  として式 (6.52) を用いて更新される。

以上をまとめるとパーティクルフィルタは一般に図 6.1 のように更新される。

#### (4) パーティクルフィルタの実装

次に, EKF(あるいは UKF) によって提案分布が逐次更新されるパーティクルフィルタの計算手順を示す<sup>5), 6)</sup>。

\* これは Bootstrap filter や Condensation algorithm に当たる。

†  $P\{\mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(j)}\} = W_k^{(j)}$  はリサンプリングしたパーティクル  $\mathbf{x}_k^{(i)}$  が  $\mathbf{x}_k^{(j)} = \mathbf{x}_k^{(i)}$  となる確率が  $W_k^{(j)}$  であることを意味する。リサンプリング法としては Sampling-Importance Resampling (SIR) 法が広く用いられている。

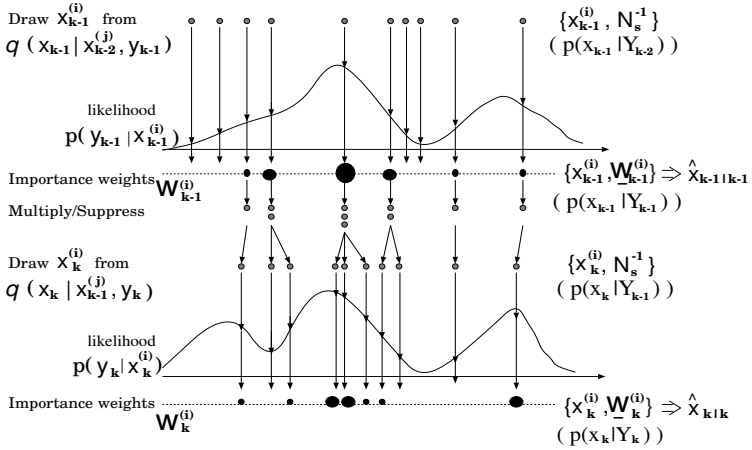


図 6・1 パーティクルフィルタの一般的な更新過程.

[拡張カルマン (あるいはアンセンテッドカルマン) パーティクルフィルタ]

1. フィルタの初期化 ( $k = 0$ )

- For  $i = 1, \dots, N_s$

- 事前確率密度関数  $p(x_0)$  に従って各パーティクルの初期状態  $x_0^{(i)}$  をサンプリングし、EKF (あるいは UKF) を初期化する。

2. フィルタの実行

- For  $k = 1, 2, \dots$

2.1) 重点サンプリング

- For  $i = 1, \dots, N_s$

-  $\bar{x}_{k-1}^{(i)} = x_{k-1}^{(i)}$ ,  $\bar{\Sigma}_{k-1}^{(i)} = \Sigma_{k-1}^{(i)}$  とし,  $F_k^{(i)}$ ,  $G_k^{(i)}$ ,  $H_k^{(i)}$  を計算した後, EKF (あるいは UKF) によって  $\bar{x}_k^{(i)}$ ,  $\bar{\Sigma}_k^{(i)}$  を更新し, 提案分布  $\mathcal{N}(x_k; \bar{x}_k^{(i)}, \bar{\Sigma}_k^{(i)})$  を求める。

- パーティクル  $x_k^{(i)}$  を生成する ( $x_k^{(i)} \sim \mathcal{N}(x_k; \bar{x}_k^{(i)}, \bar{\Sigma}_k^{(i)})$ ) .

- 正規化重要度重みを計算する ( $W_k^{(i)} = \tilde{W}_k^{(i)} / N_s$ ).

$$\underline{W}_k^{(i)} = \frac{\tilde{W}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^{N_s} \tilde{W}_k^{(j)}}, \quad \tilde{W}_k^{(i)} = \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} | x_{k-1}^{(i)})}{\mathcal{N}(x_k^{(i)}; \bar{x}_k^{(i)}, \bar{\Sigma}_k^{(i)})}$$

2.2) 状態の推定

-  $x_k^{(i)}$  と  $\underline{W}_k^{(i)}$  を用いて状態の推定値  $\hat{x}_{k|k}$  を求める。

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{i=1}^{N_s} \underline{W}_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

2.3) パーティクルのリサンプリング

- 重要度重みに基づいてパーティクルの増殖と削減を行い,  $N_s$  個のリサンブルパーティクル ( $x_k^{(i)}, \Sigma_k^{(i)}$ ) を生成する。

一般に、EKF 提案分布と比べて UKF 提案分布はパーティクルフィルタの推定性能を劇的に改善できるが、計算量は大幅に増大する。

#### 参考文献

- 1) R.E. Kalman : "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 82D, pp.34-45 (1960).
- 2) R.E. Kalman and R.S. Bucy : "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," Trans. ASME, Journal of Basic Engineering, 83D, pp.95-108 (1961).
- 3) A. H. Jazwinski : Stochastic Process and Filtering Theory, Academic press (1970).
- 4) B. D. O. Anderson and J. B. Moore : Optimal Filtering, Prentice-Hall (1979).
- 5) R. van der Merwe, N. de Freitas, A. Doucet, and E. Wan : "The Unscented Particle Filter, " Technical Report CUED/F-INFENG/TR380, Cambridge, England (2000).
- 6) B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon : Beyond the Kalman Filter, Artech House Publishers (2004).
- 7) 有本 卓 : カルマン・フィルター, 産業図書 (1977).
- 8) 片山 徹 : 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店 (1983).
- 9) 西山 清 : 最適フィルタリング, 倍風館 (2001).
- 10) 谷萩隆嗣 : カルマンフィルタと適応信号処理, コロナ社 (2005).

## 1 群 - 5 編 - 6 章

6-3  $H^\infty$  フィルタ

(執筆者: 鷹羽浄嗣)[2009 年 9 月受領]

カルマンフィルタは、外乱及び観測雑音の統計的性質（ガウス白色性、分散及び平均値）が既知の場合に最小誤差分散の意味で最適状態推定値を与える。しかし、実際のシステムではこれらの事前情報が正確に分かっていることはまれであり、ましてやガウス性や白色性が成立していることもない。この場合には、カルマンフィルタの最適性は保証されない。

外乱・観測雑音の不確かさを許容し、何らかの誤差評価規範の下で推定精度を保証しようとする試みは古くから多く報告されてきたが、1980 年代以降  $H^\infty$  制御理論の研究が発展したことに伴い、信号処理の分野でも  $H^\infty$  評価規範に基づく状態推定法が  $H^\infty$  フィルタ ( $H^\infty$  filter) として提案された<sup>1, 2, 3</sup>。  $H^\infty$  フィルタの基本的な考え方は、外乱及び観測雑音をエネルギー有界な確定的信号とみなし、最悪ケースの推定精度を最適化するというミニマックス最適化である。

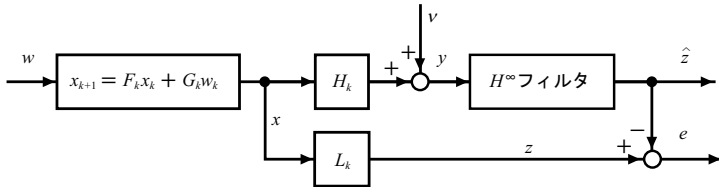
6-3-1  $H^\infty$  フィルタリング問題

つぎの離散時間線形システムを考える（図 6.2）。

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k w_k \quad (6.55)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (6.56)$$

$$z_k = L_k x_k \quad (6.57)$$

図 6.2  $H^\infty$  フィルタリング問題

ここに、 $x_k \in \mathbb{R}^n$ 、 $y_k \in \mathbb{R}^p$  及び  $z_k \in \mathbb{R}^q$  は、それぞれ時刻  $k$  における状態ベクトル、観測出力及び推定すべき未知出力である。 $w_k \in \mathbb{R}^m$ 、 $v_k \in \mathbb{R}^p$  はそれぞれ外乱と観測雑音を表す。また、観測値  $Y_l := \{y_0, y_1, \dots, y_l\}$  に基づく  $x_k$  の推定値を  $\hat{x}_{k|l}$ 、 $z_k$  の推定値を  $z_{k|l}$  とする。

上記の線形システムに対して、 $H^\infty$  誤差評価規範 ( $H^\infty$  error criterion) は次式で与えられる。

【有限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範】

$$J := \sup_{w, v, x_0} \frac{\sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_{k|l}\|^2}{\sum_{k=0}^N (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) + (x_0 - \bar{x}_0)^T \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0)} < \gamma^2 \quad (6.58)$$

【無限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範】

$$J := \sup_{w, v} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \|z_k - \hat{z}_{k|l}\|^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2)} < \gamma^2 \quad (6.59)$$



ここで、正定数  $\gamma$  は設計者が与えるパラメータであり、所望の推定精度を表す。正定値対称行列  $\Pi$  は重み行列であり、 $\bar{x}_0$  は初期状態の基準値を表す。また、外乱  $w$  及び観測雑音  $v$  は、エネルギー有界、すなわち  $\sum_k \|w_k\|^2 < +\infty$  かつ  $\sum_k \|v_k\|^2 < +\infty$  なる確定的信号と仮定している。

線形時不変システム ( $F_k, G_k, H_k, L_k$  が定数行列) の場合、外生信号  $\xi_k := (w_k, v_k)$  から推定誤差  $e_k := z_k - \hat{z}_{k|l}$  までの伝達関数行列を  $T_{e\xi}(z)$  とすると、パーセバルの等式により無限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範 (6.59) は  $T_{e\xi}(z)$  の  $H^\infty$  ノルム

$$\|T_{e\xi}\|_\infty := \sup_{|\lambda|>1} \bar{\sigma}(T_{e\xi}(\lambda)) = \sup_{\omega \in (0, 2\pi)} \bar{\sigma}(T_{e\xi}(e^{j\omega})) \quad (\bar{\sigma}: \text{最大特異値})$$

を指定されたレベル  $\gamma$  よりも小さくすることにほかならない ( $J = \|T_{e\xi}\|_\infty^2$ )。これが  $H^\infty$  フィルタの名称の由来である。このことは、周波数領域における  $H^\infty$  フィルタリング問題の解釈を与えている。すなわち、 $H^\infty$  フィルタは、すべての周波数において外生信号  $\xi$  に対する推定誤差  $e$  のゲインを  $\gamma$  未満にするフィルタである。これに対して、定常カルマンフィルタ ( $H^2$  最適フィルタ) は、 $T_{e\xi}(z)$  の  $H^2$  ノルム  $\|T_{e\xi}\|_2 = (\int_0^{2\pi} \text{Tr}[T_{e\xi}(e^{j\omega})^* T_{e\xi}(e^{j\omega})] d\omega)^{1/2}$  を最小にするフィルタであり、 $T_{e\xi}(e^{j\omega})$  の周波数応答ゲインの二乗積分を最小化していることに対応している。

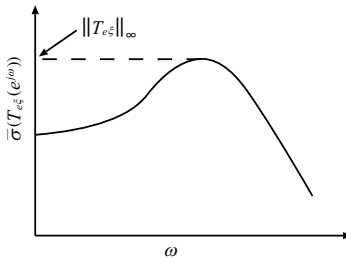


図 6.3  $T_{e\xi}(z)$  の周波数応答ゲイン ( $\sigma$ -プロット)

### 6-3-2 $H^\infty$ フィルタアルゴリズム

以下では、濾波型 ( $l = k$ ) 及び 1 段予測型 ( $l = k - 1$ ) の  $H^\infty$  フィルタアルゴリズムを与える。そのためにまず有限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範に関連するミニマックス推定問題を定式化する。

式 (6.58) の左辺の分母を払うと、 $H^\infty$  誤差評価規範は

$$\sup_{w, v, x_0} V(w, v, x_0; \hat{z}) < 0$$

$$V(w, v, x_0, \hat{z}) = \sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_{k|l}\|^2 - \gamma^2 \left[ \sum_{k=0}^N (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) + (x_0 - \bar{x}_0)^T \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \right]$$

と書き表される。したがって、 $H^\infty$  フィルタリング問題は

$$V^* := \min_{\hat{z}} \max_{w, v, x_0} V(w, v, x_0; \hat{z}) \tag{6.60}$$

なるミニマックス推定問題 (minimax estimation problem) に帰着される。ここに、 $(w, v, x_0)$  及び  $\hat{z}$  はそれぞれ  $V$  を最大化、最小化しようとするプレーヤである。

観測方程式 (6.56) より  $v_k = y_k - H_k x_k$  であるから、 $v_k$  による最大化は  $y_k$  による最大化に置き換えることができる。すなわち、式 (6.60) のミニマックス問題は

$$V^* := \min_{\hat{z}} \max_{w, y, x_0} V(w, y, x_0; \hat{z}) \tag{6.61}$$

$$V(w, y, x_0; \hat{z}) = \sum_{k=0}^N \|L_k x_k - \hat{z}_{k|k}\|^2 - \gamma^2 \left[ \sum_{k=0}^N (\|w_k\|^2 + \|H_k x_k - y_k\|^2) + (x_0 - \bar{x}_0)^T \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \right]$$

と等価である。

つぎに、フィルタが利用可能な情報に基づいて、ミニマックス最適化の順序を調べよう。

- 濾波型と 1 段予測型のいずれのフィルタリング問題においても外乱  $w$  と初期状態  $x_0$  は観測不可能である。したがって、最初に  $w_0, \dots, w_N, x_0$  に関する最大化を行う。
- 濾波型フィルタリング問題で、時刻  $k$  において  $\hat{z}_{k|k}$  は  $Y_k = \{y_0, \dots, y_k\}$  を利用可能であるから、 $\hat{z}_{k|k}$  による最小化は  $y_k$  による最大化の直前に実行する。
- 1 段予測型フィルタリング問題では、時刻  $k$  において  $\hat{z}_{k|k-1}$  は  $Y_{k-1} = \{y_0, \dots, y_{k-1}\}$  のみ利用可能であるから、 $\hat{z}_{k|k-1}$  による最小化は  $y_{k-1}$  による最大化の前でかつ  $y_k$  による最大化の後に実行する。

以上の条件に基づいて、式 (6.61) のミニマックス最適化の順序は、濾波型フィルタ及び 1 段予測型フィルタの場合、それぞれ以下のとおりになる。

**【濾波型ミニマックス推定問題】**

$$V^* = \max_{y_0} \min_{\hat{z}_{0|0}} (\max_{y_1} \min_{\hat{z}_{1|1}} (\dots \max_{y_{N-1}} \min_{\hat{z}_{N-1|N-1}} (\max_{y_N} \min_{\hat{z}_{N|N}} (\max_{w_0, \dots, w_N, x_0} V(w, y, x_0; \hat{z}))) \dots))$$

**【1 段予測型ミニマックス推定問題】**

$$V^* = \min_{\hat{z}_{0|-1}} \max_{y_0} (\min_{\hat{z}_{1|0}} \max_{y_1} (\dots \min_{\hat{z}_{N-1|N-2}} \max_{y_{N-1}} (\min_{\hat{z}_{N|N-1}} \max_{y_N} (\max_{w_0, \dots, w_N, x_0} V(w, y, x_0; \hat{z}))) \dots))$$

これらのミニマックス推定問題の可解条件及び対応する  $H^\infty$  フィルタアルゴリズムは、以下に示す定理 1 にまとめられる。スペースの都合上省略するが、ミニマックス推定問題を解く方法としては、ラグランジュ未定乗数法と平方完成を併用する方法<sup>2, 4)</sup>や不定計量空間上の直交射影による方法<sup>5)</sup>などがあるので、適宜参照されたい。

定理 1 (有限時間区間  $H^\infty$  フィルタアルゴリズム)

式 (6.55)–(6.57) の線形システムに対して  $F_k, k = 0, \dots, N$  は正則であると仮定する .

(i) 濾波型ミニマックス推定問題に一意解が存在するための必要十分条件は ,  $H^\infty$  型リカッチ差分方程式 ( $H^\infty$  Riccati difference equation)

$$P_{k+1} = F_k P_k [I + (H_k^T H_k - \gamma^{-2} L_k^T L_k) P_k]^{-1} F_k^T + G_k G_k^T, \quad P_0 = \Pi \quad (6.62)$$

の解  $P_k$  が存在して ,

$$P_k > 0 \ \& \ \gamma^2 I - L_k P_k (I + H_k^T H_k P_k)^{-1} L_k^T > 0, \quad k = 0, \dots, N \quad (6.63)$$

を満たすことである . このとき , 最適な濾波型ミニマックスフィルタは次式で与えられ ,  $V^* = 0$  が成立する . さらに , このフィルタは有限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範 (6.58) を満足する .

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad \hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0 \quad (\text{時間更新}) \quad (6.64)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (\text{観測更新}) \quad (6.65)$$

$$\hat{z}_{k|k} = L_k \hat{x}_{k|k} \quad (6.66)$$

$$K_k = P_k H_k^T (I + H_k P_k H_k^T)^{-1} \quad (\text{フィルタゲイン}) \quad (6.67)$$

(ii) 1 段予測型ミニマックス推定問題の解が一意に存在するための必要十分条件は ,  $H^\infty$  型リカッチ差分方程式 (6.62) の解が存在して ,

$$P_k > 0 \ \& \ \gamma^2 I - L_k P_k L_k^T > 0, \quad k = 0, \dots, N \quad (6.68)$$

を満たすことである . このとき , 最適な 1 段予測型ミニマックスフィルタは

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad \hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0 \quad (\text{時間更新}) \quad (6.69)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \tilde{K}_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (\text{観測更新}) \quad (6.70)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = L_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (6.71)$$

$$\tilde{K}_k = \tilde{P}_k H_k^T (I + H_k \tilde{P}_k H_k^T)^{-1} \quad (\text{フィルタゲイン}) \quad (6.72)$$

$$\tilde{P}_k = P_k (I - \gamma^{-2} L_k^T L_k P_k)^{-1} \quad (6.73)$$

で与えられ ,  $V^* = 0$  が成り立つ . 更に , この 1 段予測型フィルタは  $H^\infty$  誤差評価規範 (6.58) を満足する .

システム (6.55)–(6.57) が線形時不変システムの場合に対して , 無限時間区間  $H^\infty$  フィルタリング問題を考える . この場合 ,  $H^\infty$  フィルタアルゴリズムは , 初期条件  $P_0 = 0$  の下で  $N \rightarrow +\infty$  としたときのリカッチ差分方程式 (6.62) の定常解  $P$  を用いて以下のように構成される .

定理 2 (無限時間区間  $H^\infty$  フィルタアルゴリズム)

システム (6.55)-(6.57) において,  $F_k, G_k, H_k, L_k$  はそれぞれ適当な次元の定数行列  $F, G, H, L$  とする. 更に,  $(F, G)$  は可安定かつ  $(H, F)$  は可検出であると仮定する.

(i) 無限時間区間  $H^\infty$  誤差評価規範 (6.59) を満たす濾波型フィルタが存在するための必要十分条件は,  $H^\infty$  型代数リカッチ方程式 ( $H^\infty$  algebraic Riccati equation)

$$P = FP[I + (H^T H - \gamma^{-2} L^T L)P]^{-1} F^T + GG^T \quad (6.74)$$

の安定化解  $P$  が存在して

$$P \geq 0 \ \& \ \gamma^2 I - LP(I + H^T H P)^{-1} L^T > 0 \quad (6.75)$$

を満たすことである. このとき, 式 (6.59) を満たす濾波型  $H^\infty$  フィルタの一つは次式で与えられる.

$$\hat{x}_{k+1|k} = F \hat{x}_{k|k} \quad (\text{時間更新}) \quad (6.76)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K(y_k - H \hat{x}_{k|k-1}) \quad (\text{観測更新}) \quad (6.77)$$

$$\hat{z}_{k|k} = L \hat{x}_{k|k} \quad (6.78)$$

$$K = PH^T(I + HPH^T)^{-1} \quad (\text{フィルタゲイン}) \quad (6.79)$$

(ii) 式 (6.59) の  $H^\infty$  誤差評価規範を満たす 1 段予測型フィルタが存在するための必要十分条件は,  $H^\infty$  型代数リカッチ方程式 (6.74) の安定化解  $P$  が存在して,

$$P \geq 0 \ \& \ \gamma^2 I - LPL^T > 0 \quad (6.80)$$

を満たすことである. このとき, 1 段予測型  $H^\infty$  フィルタの一つは次式で与えられる.

$$\hat{x}_{k+1|k} = F \hat{x}_{k|k} \quad (\text{時間更新}) \quad (6.81)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \tilde{K}(y_k - H \hat{x}_{k|k-1}) \quad (\text{観測更新}) \quad (6.82)$$

$$\hat{z}_{k|k-1} = L \hat{x}_{k|k-1} \quad (6.83)$$

$$\tilde{K} = \tilde{P}H^T(I + H\tilde{P}H^T)^{-1} \quad (\text{フィルタゲイン}) \quad (6.84)$$

$$\tilde{P} = P(I - \gamma^{-2}L^TLP)^{-1} \quad (6.85)$$

注 1 所期の  $H^\infty$  誤差評価規範を満足する  $H^\infty$  フィルタは一意ではない. 定理 1 及び 2 で与えた  $H^\infty$  フィルタは, “ $H^\infty$  フィルタリング問題の中心解” または “中心  $H^\infty$  フィルタ” と呼ばれている. すべての  $H^\infty$  フィルタのパラメトリゼーションは, 有限時間区間フィルタの場合は文献 3, 6), 無限時間区間フィルタの場合は文献 7) で導出されている.

注 2 パラメータ  $\gamma$  を  $\gamma \rightarrow \infty$  とすると, 式 (6.62), (6.74) はそれぞれカルマンフィルタ (外乱及び雑音の分散は単位行列) に現れるリカッチ差分方程式及び代数リカッチ方程式に漸近する. このため,  $\gamma \rightarrow \infty$  のとき, 中心  $H^\infty$  フィルタはカルマンフィルタと一致する.

注3 カルマンフィルタの場合と異なり, リカッチ方程式 (6・63), (6・68) の解  $P_k, P$  の存在は, パラメータ  $\gamma$  の値に依存する. このため, 所期の  $H^\infty$  推定性能をもつ  $H^\infty$  フィルタの存在も  $\gamma$  に依存する. すなわち,  $\gamma$  が小さ過ぎると (6・58) または (6・59) を満たす  $H^\infty$  フィルタは存在しない. 逆に,  $\gamma$  を十分大きく取れば,  $H^\infty$  フィルタの存在は保証されるが, 上述のように中心  $H^\infty$  フィルタはカルマンフィルタに漸近する.

### 6-3-3 指数型二次誤差評価規範における最適性

ここでは, 外生信号  $(w, v)$  がガウス白色雑音である場合の  $H^\infty$  フィルタの確率的な最適性を議論する<sup>8,9)</sup>.

定理3 式 (6・55)–(6・57) の線形離散時間システムを考える. ただし, 初期状態  $x_0$  は平均  $\bar{x}_0$  共分散  $\Pi$  のガウス分布に従い,  $w, v$  は次式を満足するガウス白色雑音であると仮定する.

$$\mathbf{E}\{w_k\} = 0, \mathbf{E}\{v_k\} = 0, \mathbf{E}\left\{\begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l^T & v_l^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots$$

ここに,  $\mathbf{E}$  は期待値を表し,  $\delta_{kl}$  はクロネッカーのデルタである.

このとき, 指数型二次誤差評価規範 (exponential-quadratic error criterion)

$$J_{\text{EQ}} = \mathbf{E}\left[\exp\left(\gamma^{-2} \sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_{k|l}\|^2\right)\right]$$

を最小化するフィルタリング問題は, 式 (6・60) のミニマックス推定問題と等価である. したがって, 定理1 の中心  $H^\infty$  フィルタは  $J_{\text{EQ}}$  に関して最適である.

濾波型フィルタリングの場合に対して, 上の定理が成り立つことを示す.

ガウス白色性の仮定より,  $w, v, x_0$  の結合確率密度関数  $f$  は

$$f(w, v, x_0) = c \cdot \exp\left\{-\sum_{k=0}^N (\|w_k\|^2 + \|v_k\|^2) - (x_0 - \bar{x}_0)^T \Pi^{-1} (x_0 - \bar{x}_0)\right\}$$

で与えられる. ここに  $c$  は正規化のための正定数である. これを  $J_{\text{EQ}}$  に代入することにより

$$\begin{aligned} J_{\text{EQ}} &= \int_{\mathbb{R}^{p(N+1)}} \int_{\mathbb{R}^{m(N+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\gamma^{-2} \sum_{k=0}^N \|z_k - \hat{z}_{k|l}\|^2\right) f(w, v, x_0) dx_0 dw dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{p(N+1)}} \int_{\mathbb{R}^{m(N+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\gamma^{-2} V(w, v, x_0; \hat{z})) dx_0 dw dv \end{aligned}$$

を得る. ここで, 前節と同様にフィルタが利用可能な情報の構造を考えると,  $J_{\text{EQ}}$  の最小化は, 次式ようになる.

$$\begin{aligned} \min_{\hat{z}} J_{\text{EQ}} &= \\ c \int_{\mathbb{R}^p} \min_{\hat{z}_{00}} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \min_{\hat{z}_{11}} \left[ \cdots \left[ \int_{\mathbb{R}^p} \min_{\hat{z}_{N/N}} \left[ \int_{\mathbb{R}^{m(N+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\gamma^{-2} V) dx_0 dw \right] dv_N \right] \cdots \right] dv_1 \right] dv_0 \end{aligned}$$

ここで、 $\partial^2 Z(x)/\partial x \partial x^T < 0$  なる連続関数  $Z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(Z(x)) dx = \text{const} \cdot \exp \left\{ \max_x Z(x) \right\} \quad (\text{const: 適当な正定数})$$

が成り立つことが知られている<sup>10)</sup>。この公式を  $\min_{\hat{z}} J_{EQ}$  に適用し、指数関数の単調増加性に着目すれば、

$$\min_{\hat{z}} J_{EQ} = \text{const} \cdot \exp \left\{ \max_{v_0} \min_{\hat{z}_{00}} (\cdots (\max_{v_N} \min_{\hat{z}_{N|N}} (\max_{w, x_0} (\gamma^{-2} V)) \cdots)) \right\} \quad (6 \cdot 86)$$

を得る。上式よりミニマックス推定問題 (6・60) と指数型二次誤差評価最適推定問題は等価であることが分かる。したがって、ミニマックス推定問題の解である  $H^\infty$  フィルタ (6・64)–(6・66) は、指数型二次誤差評価  $J_{EQ}$  に関して最適である。

### 6-3-4 線形回帰モデルへの適用 - LMS アルゴリズムとの関連<sup>5)</sup>

線形回帰モデル

$$y_k = \varphi_k^T \theta + v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6 \cdot 87)$$

に対するパラメータ推定を考える。ここで、 $\theta \in \mathbb{R}^n$  は未知パラメータであり、 $v_k$  は観測雑音である。問題は、観測データ  $(y_k, \varphi_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  からパラメータ  $\theta$  を逐次推定することである。なお、 $N$  は十分に大きく、かつ、持続的励振条件

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \varphi_k \varphi_k^T > 0 \quad (6 \cdot 88)$$

が成り立っていると仮定する。ここで、状態方程式

$$\theta_{k+1} = \theta_k, \quad \theta_0 = \theta \quad (6 \cdot 89)$$

を導入し、 $H^\infty$  誤差評価規範

$$\sup_{x_0, v} \frac{\sum_{k=0}^N \|y_k - \hat{y}_k\|^2}{\sum_{k=0}^N \|v_k\|^2 + \mu^{-1} \|\theta_0 - \bar{\theta}_0\|^2} < \gamma^2, \quad \mu > 0 \quad (6 \cdot 90)$$

のもとでパラメータ推定値  $\hat{\theta}$  を求めることを考える。このパラメータ推定問題は、6-5-1 節の  $H^\infty$  フィルタリング問題で、 $x_k = \theta_k$ ,  $z_k = y_k$ ,  $F_k = I$ ,  $G_k = 0$ ,  $H_k = L_k = \varphi_k^T$ ,  $\bar{x}_0 = \bar{\theta}_0$ ,  $\Pi = \mu I$  とおいたものに相当する。この問題に 1 段予測型  $H^\infty$  フィルタアルゴリズム (定理 1(ii)) を適用すれば、逐次最小二乗推定とよく似た次の逐次推定アルゴリズムを得る。

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + K_k (y_k - \varphi_k^T \hat{\theta}_k), \quad \hat{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 \quad (6 \cdot 91)$$

$$K_k = P_k \varphi_k / (1 + \varphi_k^T P_k \varphi_k) \quad (6 \cdot 92)$$

$$P_{k+1} = P_k [I + (1 - \gamma^{-2}) \varphi_k \varphi_k^T P_k]^{-1}, \quad P_0 = \mu I \quad (6 \cdot 93)$$

ここで,  $Q_k := P_k^{-1}$  とおけば, 式 (6.93) は

$$Q_{k+1} = Q_k + (1 - \gamma^{-2})\varphi_k\varphi_k^T, \quad Q_0 = \mu^{-1}I \quad (6.94)$$

となる. また, 式 (6.68) に相当する条件は次式となる.

$$Q_k - \gamma^{-2}\varphi_k\varphi_k^T > 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (6.95)$$

式 (6.94) を解くと  $Q_k = \mu^{-1}I + (1 - \gamma^{-2})\sum_{i=0}^{k-1}\varphi_i\varphi_i^T$  を得る.  $\gamma < 1$  のとき  $1 - \gamma^{-2} < 0$  であるから, 持続励振条件 (6.88) と  $N \gg 1$  のもとで  $Q_N$  は正定値でなくなる. よって,  $\gamma \geq 1$  でなければならない.

ここで,  $\gamma = 1$  とおく.  $Q_k \equiv \mu^{-1}I$  となることに注意すれば,

$$0 < \mu < \left( \sup_k \|\varphi_k\|^2 \right)^{-1} \quad (6.96)$$

のもとで  $Q_k - \gamma^{-2}\varphi_k\varphi_k^T = \mu^{-1}I - \varphi_k\varphi_k^T > 0$  となり, 式 (6.95) が成立つことが分かる. よって, 式 (6.96) のように  $\mu$  を選べば, 達成可能な  $H^\infty$  推定性能  $\gamma$  の最適値は  $\gamma = 1$  である. 更にこのとき,  $P_k \equiv \mu I$  及び  $K_k = \mu\varphi_k$  となり, 上述の逐次推定アルゴリズムは

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \mu\varphi_k(y_k - \varphi_k^T\hat{\theta}_k), \quad \hat{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 \quad (6.97)$$

となる. これは従来より信号処理の分野で広く用いられている学習率  $\mu$  の LMS アルゴリズムにほかならない. したがって, LMS アルゴリズムは式 (6.96) の条件のもとで  $H^\infty$  誤差評価規範の意味で最適であることが示された. このことは, LMS アルゴリズムの有用性を理論的に裏づけている.

#### 参考文献

- 1) K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar, "Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.36, no.2, pp.152-166, 1991.
- 2) 鷹羽浄嗣・片山 徹, "線形離散時間系に対するミニマックス推定問題," システム制御情報学会論文誌, vol.7, no.8, pp.322-331, 1994.
- 3) B. Hassibi, A.H. Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein spaces – Part I: Theory & Part II: Applications," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, no.1, pp.18-33, 34-49, 1996.
- 4) 片山 徹, "新版応用カルマンフィルタ," 第 9 章, 朝倉書店, 2000.
- 5) B. Hassibi, A.H. Sayed and T. Kailath, " $H_\infty$  optimality of the LMS algorithm," IEEE Trans. Signal Processing, vol.44, no.2, pp.267-280, 1996.
- 6) B. Hassibi, A.H. Sayed and T. Kailath, Indefinite Quadratic Estimation and Control—A Unified Approach to  $H^2$  and  $H^\infty$  Theories, SIAM, 1999.
- 7) K. Takaba and T. Katayama, "Parametrization of discrete-time  $H_\infty$  filters based on model-matching," 計測自動制御学会論文集, vol.33, no.7, pp.648-655, 1997.
- 8) J.L. Speyer, C. Fan and N. Banavar, "Optimal stochastic estimation with exponential cost criteria," Proc. 31st IEEE Conf. Decision Control, pp.2293-2298, 1992.
- 9) K. Takaba, "Stochastic properties of the  $H_\infty$  filter," Statistical Methods in Control and Signal Processing (T. Katayama and S. Sugimoto (eds.)), Marcel-Dekker, pp.239-256 1997.
- 10) P. Whittle, "Risk-Sensitive Optimal Control," Wiley, 1990.