

1 群 (信号・システム) - 11 編 (非線形問題)

---

## 2 章 カオスとその応用

(執筆者:)

概要

【本章の構成】

## 1 群 - 11 編 - 2 章

## 2-1 カオスの基礎

## 2-1-1 カオスの歴史

(執筆者: 中島弘之)[2009年3月受領]

単純なシステムから生成されるが非周期的で複雑かつ予測困難な現象の総称としての「カオス」という学術用語が初めて使用されたのは 1975 年に出版された Li と Yorke による論文<sup>1)</sup>であるとされている<sup>2)</sup>。その後、より厳密にカオスを定義する多くの試みがなされているが、現在までに確定的なものは得られていない。しかし、今日のいかなる定義のもとでもカオスと呼ばれ得る現象が、上田によって強制外力を有する二次元非線形自励振動系において<sup>3)</sup>、また Lorenz によって流体系における時空振動の特定モードを表現する三次元自律系において<sup>4)</sup>、ともに 1960 年代の初めに独立に発見された。現在の意味でのカオスという学術用語は存在しなかったが、アナログあるいはデジタルの計算機を用いて定量的かつ視覚的に表現されることにより、カオス現象が初めて明確に認識され、その探究が開始されたのである。

これらの発見がカオス研究の歴史の起源というに相応しく、上記の Li と Yorke の論文やストレンジアトラクタという用語を導入した Ruelle と Takens による 1971 年の論文<sup>5)</sup>などが契機となり、1970 年代になって上田と Lorenz の研究の重要性が広く認識された。更に、1800 年代後半のポアンカレによる天体力学における二重漸近構造の発見<sup>6)</sup>や、それを一般の力学系の問題として抽象化して考察した Birkhoff による 1900 年代初めの研究<sup>7)</sup>、そして、その構造が今日の意味でのカオスの本質に重要にかかわることを見いだした Smale による馬蹄力学系の研究<sup>8)</sup>、エルゴード理論におけるベルヌイシフト<sup>9)</sup>のような混合性を示すシンプルな一次元系などがすべてカオスの概念のもとに統一して理解され、認識されるに至った。

1970 年代後半から 1980 年代にかけては、物理・化学・電気・機械など様々な分野でカオスの研究が盛んになり、カオスを特徴づけるリヤプノフ指数やフラクタル次元の算出法などが考案され、また、メルニコフの方法やシルニコフの方法を用いたカオスの存在証明なども検討されるようになった。1980 年代後半には、カオスを工学的に応用しようとする試みが開始され、カオスダイナミクスを利用した最適化問題の解法、時系列のカオス性に着目した予測手法、カオスの制御やカオスの同期、それを利用したカオス通信などが提案され、これらの研究は現在も進展している。

## 2-1-2 ストレンジアトラクタ

(執筆者: 中島弘之)[2009年3月受領]

ストレンジアトラクタはカオスアトラクタ (chaotic attractor) とも呼ばれ、力学系におけるカオス的な軌道を含むアトラクタのことであり、幾何学的にはフラクタル構造という特徴を一般に有している。

ここで、アトラクタとは、力学系の相空間において、周囲の軌道を吸引する性質をもった集合であり、物理系など実在のシステムにおいては、通常観測される定常的な時間波形や時系列を表現している。数学的にはアトラクタは以下のように定義される。まず、相空間上の点  $x$  に対して、 $x$  を出発する軌道が時間経過とともに漸近していく集合を  $\omega$  極限集合と呼び、 $\omega(x)$  と表す。また、集合  $A$  に対して  $\omega(x) \subset A$  となるような  $x$  の集合は  $A$  の引力圏 (basin あるいは domain of attraction) と呼ばれる。引力圏が自身の近傍になっているようなコンパクト不変集合  $A$  で稠密な軌道を含むものがアトラクタである (引力圏の条件を「近傍」から

「測度が正の集合」に緩和した定義もある<sup>10)</sup>).

このように定義されるアトラクタは、一般にカオスのと称される以下のような性質をもつとき、ストレンジアトラクタと呼ばれる。すなわち、アトラクタには稠密な非周期軌道が存在し、かつ、可算無限個の周期軌道が含まれている。これらは、初期条件の任意の微小量の差異が時間経過とともにアトラクタのサイズまで拡大されるという性質（初期条件に対する鋭敏な依存性）をもち、局所的な線形近似では最大リアプノフ指数が正という性質で特徴づけられる不安定性を有する。

代表的なストレンジアトラクタとしては、二次元強制振動型非自律系である Duffing 方程式のストロゴ写像で観測される Japanese attractor や三次元自律系である Lorenz 方程式の解である Lorenz attractor などがある。このような代表例も含め多くのストレンジアトラクタはカントール集合のようなフラクタル（非整数次元）構造をもっている。フラクタル性もストレンジアトラクタの重要な特徴の一つであるが、軌道のカオス性とアトラクタのフラクタル性とは一般には独立である。冒頭に記したように、ストレンジアトラクタとカオスアトラクタは同義の概念として用いられるのが一般的であるが、フラクタル構造をもったアトラクタをストレンジアトラクタと呼び、カオス軌道を含むものをカオスアトラクタと呼ぶというふうに使い分けられる場合もある。

### 2-1-3 ローレンツシステム, レスラーシステム (執筆中: 上田哲史)[2009年3月受領]

E. ローレンツは、1963年に気象という多自由度の複雑な対象に対し、レイリー・ベルナル対流モデルからいくつかの大胆でかつ合理的な近似を行い、次の3階常微分方程式を得た。

$$dx/dt = \sigma(y - x), \quad dy/dt = rx - y - xz, \quad dz/dt = xy - bz$$

これをローレンツシステムと呼ぶ。σ, r, b はパラメータであり、状態変数とともに実システムとの対応がある。図 2・1 (a) にローレンツアトラクタを示す。

O. E. レスラーは 1976 年にローレンツシステムに類似しながらもより定性的解析の行いやすいカオス力学系として以下の微分方程式を提案した。

$$dx/dt = -y - z, \quad dy/dt = x + ay, \quad dz/dt = bx - (c - x)z$$

これをローレンツシステムと呼ぶ。a, b, c はパラメータである。図 2・1 (b) に典型的なローレンツアトラクタを示す。

### 2-1-4 一次元カオス写像

(執筆中)

### 2-1-5 リー・ヨークの定理

(執筆中)

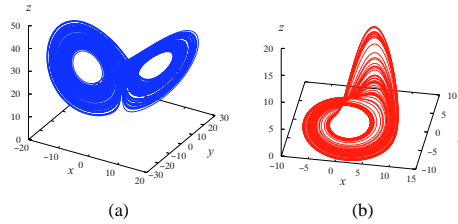


図 2.1 (a) レスラーアトラクタ,  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ .  $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, -1, 22)$ . (b) ローレンツアトラクタ,  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5$ .  $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0.5, 0)$ .

#### 参考文献

- 1) T.-Y. Li and J.A. Yorke, "Period three implies chaos," Amer. Math. Monthly, vol.82, no.10, pp.985-992, 1975.
- 2) B.R. Hunt, J.A. Kennedy, T.-Y. Li and H.E. Nusse (eds), "The theory of chaotic attractors," Springer, 2004.
- 3) Y. Ueda, "Strange attractors and the origin of chaos," in "The impact of chaos on science and society"(C. Grebogi and J. A. Yorke (eds.)), United Nations University Press, 1997.
- 4) E.N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," Journal of the Atmospheric Sciences, vol.20, no.2, pp.130-141, 1963.
- 5) D. Ruelle and F. Takens, "On the nature of turbulence," Commun. Math. Phys., vol.20, pp.167-192, 1971.
- 6) ポアンカレ (福原満州雄・浦太郎 (訳)), "常微分方程式," 共立出版, 1970.
- 7) G.D. Birkhoff and P.A. Smith, "Structure analysis of surface transformations," J. Math. (Liouville), S.9, vol.7, pp.354-379, 1928.
- 8) S. Smale, "Differentiable dynamical systems," Bull. Amer. Math. Soc., vol.73, pp.747-817, 1967.
- 9) ビリングスレイ (渡辺毅・十時東生 (訳)), "確率論とエントロピー," 吉岡書店, 1968.
- 10) J. Milnor, "On the concept of attractor," Commun. Math. Phys., vol.99, pp.177-195, 1985.

## 1 群 - 11 編 - 2 章

## 2-2 実システムのカオス

## 2-2-1 回路系のカオス

(執筆: 齋藤利通) [2009 年 9 月 受領]

電気電子回路に複雑な現象が発生することは、古くから知られていた。ダフィングの方程式<sup>1,2)</sup>によって記述される鉄共振回路などがその典型例である。しかし、当時はカオスに関する理論は整備されておらず、現象の認識や解析は困難であった。自然科学の広い分野でカオスや分岐現象に関する研究が盛んになっていくのと連動して、回路におけるカオスの研究も発展していった。

カオスや分岐現象を呈する簡素な回路をカオス発生回路と呼ぶ。ここでいう回路とは、基本回路素子（抵抗，キャパシタ，インダクタ）で構成され、キルヒホッフの法則に支配されるものである。各素子は線形でも非線形でもよい。抵抗は、電源やスイッチも包含する広義の抵抗を意味する。カオス発生回路の研究には以下のような意義がある。

1. 基本回路素子は、電荷、電圧、電流、磁束の物理量を関連づけ、それによって構成される回路の呈する現象は、化学反応や乱流と同様な自然現象である。カオス発生回路は非線形現象を考察するための簡素な実物理系である。
2. 機械、化学、生物系の等価回路を構築できる場合がある<sup>3)</sup>。等価回路と元の系は同様な微分方程式で記述される。回路の動作は、一般に機械、化学、生物系よりも高速であり、その実験は容易である。市販の IC などを用いた安価な実験も可能である。
3. カオスの工学的応用を実現するためには、簡素なカオス発生回路の設計と、その低電力集積化技術が重要な役割を果たす。

## (1) 自律系のカオス発生回路

「どのようにすれば簡素なカオス発生回路が構成できるか?」この基本問題を図 2-2 に示した自律系回路で考える。同図において、 $N$  は線形部分回路であり、これに  $i = G(v_D)$  なる

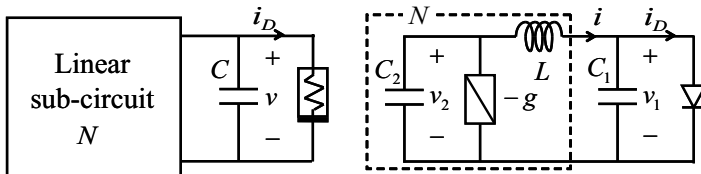


図 2-2 自律系カオス発生回路の構成例

特性を有する電圧制御型抵抗が接続されている。 $N$  がメモリー素子（キャパシタかインダクタ）を一つしか含まない場合、回路はリミットサイクルを呈することができるが（ファンデアポール方程式の項参照）、カオスは発生しない。解の一意性がその根拠である。同図右に、 $N$  が二つのメモリー素子を含む例を示す。同回路は、線形負性コンダクタ  $-g$  とダイオードを含み、カオスを発生することができる。回路の動作は次式で記述される。

$$C_1 \frac{d}{dt} v_1 = i - G(v), \quad C_2 \frac{d}{dt} v_2 = -i + gv_2, \quad L \frac{d}{dt} i = -v_1 + v_2 \quad (2\cdot 1)$$

$G(v)$  を区分線形近似した場合は、区分的厳密解を用いた厳密な議論が可能である<sup>4)</sup>。このように、自律系回路にカオスを発生させるためには、少なくともメモリ素子三つと非線形能動素子が必要である。チュア回路は、このような自律系カオス発生回路の先駆的代表例である<sup>5)</sup>。非自律系については、ダフィング方程式の項を参照されたい。

(2) 不連続スイッチを含むカオス発生回路

重要なカオス発生回路の一つに、図 2・3 に示したような不連続スイッチを含む回路がある。同図 (a) で、 $N$  は線形部分回路であり、キャパシタ電圧  $v$  があるしきい値電圧  $V_T$  に達すると、スイッチ  $S$  が一瞬閉じて  $v$  はベース  $E$  にジャンプする。 $N$  が抵抗と定電圧源で構成されたテナンの等価回路で記述できる場合は、よく知られた弛張発振器となり、 $v$  が充電とジャンプを繰り返してのこぎり波が発生する。言うまでもなく実際の回路は内部抵抗  $r_0$  を含み  $v$  は有限時間で放電されるが、解析の便宜のために  $r_0$  をショートさせている。

$N$  が一つ以上のメモリ素子を含み  $v$  が振動できるとカオスが発生する。同図 (b) の例では、 $S$  が off のとき  $v$  は発散振動する。同図 (c) のように  $S$  を作用させると振動の発散を抑制できる。 $S$  が一瞬閉じるとジャンプによって  $v = E$  となるが、その直後の時点では、過去にジャンプがあったのかなかったのが不明となる。すなわち、過去に対して解の一意性が成り立たない。回路は同図 (d) のようにカオスを呈する。回路の動作は、二次元微分方程式としきい値作用によるジャンプによって記述される。

$$\begin{cases} C \frac{d}{dt} v = i \\ L \frac{d}{dt} i = v + Ri \end{cases} \quad (v(t_+), i(t_+)) = (E, i(t)) \quad \text{if } v(t) = V_T \quad (2\cdot 2)$$

この方程式の区分的厳密解を接続することにより、カオスや分岐現象を精密に解析することができる<sup>6)</sup>。このように振動とジャンプを繰り返す系は、様々なスパイク列を発生するニューロンモデルとも密接に関連している<sup>7)</sup>。

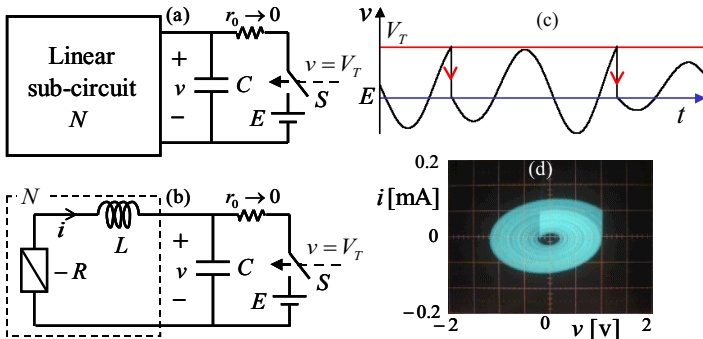


図 2・3 振動発火型カオス発生回路

(3) カオス発生回路の応用

カオス発生回路の工学系応用を考える場合、消極的な立場と積極的な立場がある。前者は、

不規則なカオス動作は好ましくなく、これが発生しないように回路を設計する、といった立場である。後者は、カオスは多様性のある現象で、これを系の性能を向上させるために積極的に使おうとする立場である。そのような応用を考えるための典型例に、パワーエレクトロニクスにおける DC-DC コンバータ<sup>8,9)</sup>がある。図 2・4 に基本的な回路モデルを示す。回路の入力は直流電源  $V_i$  であり、スイッチ  $S$  を適当に動作させることによって入力を降圧あるいは昇圧させ、これを負荷に供給する。スイッチ  $S$  の制御法には様々なものがあり、負荷電圧に依存する電圧モード制御と、負荷電流に依存する電流モード制御に大別される。「クロック周期ごとに  $S$  が on となり、インダクタ電流  $i$  がしきい値に達すると off になる」という電流モード制御の例を考える。この例では、クロック周期ごとに  $S$  が on になったとき、それ以前に  $S$  が on であったか off であったかは不明である（過去に対して解の一意性が成り立たない）。この回路にはカオスや分岐現象が発生する。回路がカオス的動作をするパラメータ領域を解明し、そのパラメータを避けて設計するのが消極的応用である。カオス波形が広帯域スペクトルを有することに注目し、これを用いてスイッチング間隔を分散させて、妨害電波を抑制しようというのが積極的応用の例である。

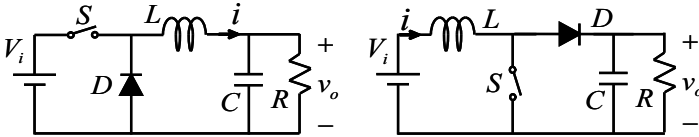


図 2・4 基本的な DC-DC コンバータの回路モデル。左が降圧系、右が昇圧系。

ほかに様々なカオス発生回路の応用が検討されているが、特筆すべきはニューロモルフイックハードウェアである。これは、生物の神経系の機能からヒントを得て設計されたハードウェアであり、広範な回路が対象となる<sup>10)</sup>。例として、動的連想メモリ、シリコン網膜、シリコン蝸牛などがあげられる。これらはいずれも非線形回路であり、パラメータと動作の関係の解明が重要である。特に、動的連想メモリの動作を柔軟にするには、カオス的振る舞いが有効であることが示唆されており、系の集積回路化技術とともに、研究が進められている。

## 2-2-2 生体のカオス

(執筆者：林 初男)[2009年4月受領]

生体系は非線形であるがゆえに非常に複雑な振る舞いをすることがある。今では、それらの多くはカオスと呼ばれる現象だと理解されている。しかし、カオスであることが実験で明確に示されている例はそれほど多いわけではない。それは、生体を構成する要素の多さや構造の複雑さによって力学系としての次元が高くなり、カオスであることを明確に示すのが容易でなくなるからだと考えられる。

生体系においてカオス活動の最も確実な証拠が実験で得られているのはニューロンなどの興奮性細胞である。1981年に心筋細胞でカオス的な活動の存在が示唆され<sup>11)</sup>、続いて1982年に車軸藻<sup>12)</sup>とニューロン<sup>13)</sup>で、1984年に巨大軸索<sup>14)</sup>で、1990年に心臓組織<sup>15)</sup>で、カオス活動の明確な証拠が示されている。ニューロカオスの発見後、ニューロンモデルを用いたカオス研究も盛んに行われた。その詳細については文献 16) を参照されたい。

ここでは、ニューロカオスの明確な証拠が実験で示されているイソアワモチニューロンの

カオス活動について述べる．イソアワモチ（軟体動物）の食道環神経節に巨大ニューロンが存在する．人工海水の  $\text{Na}^+$  濃度を高くして繰り返し発火（ $\sim 2.5 \text{ Hz}$ ）を起こさせ、適当な周波数の交流電流（ $\sim 6.3 \text{ Hz}$ ）で刺激すると、膜電位応答が不規則になる．この膜電位応答から図 2・5(A) に示すようなストレンジアトラクタが再構成されている．更に、交流電流の位相  $\phi$  を導入して三次元空間でストレンジアトラクタを再構成すると、図 2・5(B) で模式的に示すように、アトラクタは扁平な帯のかたちをしている．これは帯の面に垂直な方向には安定で軌道がアトラクタに引き寄せられ、帯の面内では不安定で軌道間の距離が指数関数的に大きくなるためである． $\phi$  軸を輪にまげて  $\phi = 0$  と  $\phi = 360^\circ$  の面を接着するとトーラスになる． $\phi$  軸に垂直な平面で軌道を切ると、平面と軌道の交点  $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$  が得られ（図 2・5(B)(a)）、これらの交点の集合がアトラクタの断面を与える（図 2・5(B)(b)）．図 2・5(C) は実験データから得られた断面である．アトラクタが引き伸ばされ（図 2・5(C) (a)~(d)）、折れ畳まれている（図 2・5(C) (e)~(i)）ことが分かる．この引き伸ばしと折れ畳みが交流電流の周期ごとに繰り返されるので、軌道は複雑に走り予測不可能になる．これがカオス生成の機構である．

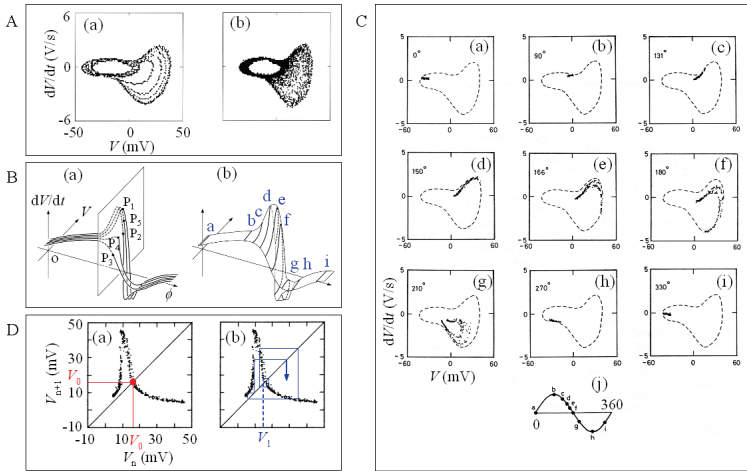


図 2・5 イソアワモチ巨大ニューロンのカオス応答．(A) ストレンジアトラクタ<sup>13)</sup>．軌道 (a) とストレンジアトラクタの形 (b) が示されている．(B) 3 次元位相空間で見たストレンジアトラクタ（模式図）<sup>16)</sup>．交流電流の位相（ $0 \sim 360^\circ$ ）で重ね描きした軌道 (a) とアトラクタを平面で切った断面 (b) が示されている．(C) ストレンジアトラクタの断面 (a~i) ．(j) アトラクタを切った交流電流の位相  $\phi$  ．(D) 一次元写像<sup>13)</sup>．

軌道と平面との交点の時系列から一次元写像  $F : V_n \rightarrow V_{n+1}$  を求めることができる（図 2・5(D)）． $V_0 = F(V_0)$  を満たす交点  $V_0$  は固定点である（図 2・5(D)(a)）．固定点近傍の交点  $V_1$  から写像を繰り返すと、軌道が平面と交わるたびに交点は固定点から振動しながら離れていく（図 2・5(D)(b)）．写像が上に凸な関数であるので交点はそのうち固定点近傍に押し戻されるが、再び固定点から離れていく．その結果、交点が固定点に落ち着くことはない．換言すれば、軌道が固定点を通る周期軌道に落ち着くことはない．固定点が不安定であることは



ストレンジアトラクタの引き伸ばしに対応し、写像が上に凸であることはストレンジアトラクタの折れ畳みに対応している。このようにニューロンのカオス応答は非常に簡単な写像に従っている。

イソアワモチの食道環神経節には自発的に発火するペースメーカーニューロンも存在する。このニューロンは、交流電流が加わっていても、膜電位を変化させると周期 1, 周期 2, 周期 4, ... と周期倍分岐してカオスに至り、更に周期 3 へと分岐する<sup>17)</sup>。

以上で述べたニューロカオスの研究は脳のカオスに関する研究を刺激することになった。1985 年頃からヒトの脳波について非常に多くの研究がなされ、フラクタル次元の推定やサロゲートアルゴリズムを用いた解析から脳波はランダムな現象ではないことが示唆されている。しかし、脳波から脳のカオス活動の十分な証拠は得られていない。脳におけるカオスの明確な証拠はラットの脳の海馬と新皮質第一次体性感覚野で得られている。海馬を用いた実験ではラットの脳から切り出した脳切片が用いられた。苔状線維周期刺激に対する海馬 CA3 領野の不規則な電場電位応答（ニューロン集団の応答）からストレンジアトラクタが再構成され、上に凸な二次元写像が得られている<sup>18)</sup>。また、第一次体性感覚野を用いた実験では、麻酔をかけたラットが用いられ、内側毛帯を周期刺激して第一次体性感覚野の表面から記録された不規則な電場電位応答からストレンジアトラクタ及び二次元写像が得られている<sup>19)</sup>。

脳のカオス活動の役割についても議論されている。その一つに、動物が匂いをかいたときの嗅球の時空活動の観測から、脳のカオスは外界からの情報を受けてニューロン活動の空間パターンを速やかに作るための不規則な背景活動を与えているという主張がある<sup>20)</sup>。また、新皮質を模擬した神経回路モデルでカオス遍歴が起こることが示されている<sup>21)</sup>。脳の神経回路には記憶に対応する不安定なアトラクタ（アトラクタ痕跡）がたくさん存在し、神経回路の状態はこれらのアトラクタ痕跡をカオス的に遍歴すると考えられている。これらの議論は脳の認識や記憶との関連でなされているが、まだ結論には至っていない。

### 2-2-3 機械振動系のカオス

（執筆者：藪野浩司）[2009 年 3 月受領]

機械振動系に発生するカオス現象の解析には、電気系などに対する解析手法が適用可能な場合が多いが、非線形性の発生要因には機械系特有のものがある<sup>22)</sup>。そこで以下では機械系（特に構造系）がもつ非線形特性の発生要因を示す。構造物が大きく変形するといわゆるフックの法則が成立せず（ひずみと応力が比例せず）、復元力が非線形性を示すようになる（このような非線形性を材料非線形性と呼ぶ）。図 2・6(a) に示すような 2 リンク系で  $x$  方向に運動を拘束された物体  $m$  は、ばねの復元力特性が線形であっても、その運動とばね力の作用する方向が平行ではないため、変位に比例しない非線形な復元力をばねから受ける（このような非線形性を幾何学的非線形性と呼ぶ）。機械構造物の基本要素である梁に関する幾何学的非線形性には以下の 2 種類がある。図 2・6(b) に示すような単純支持梁は中立面の変形曲率の非線形性に起因する幾何学的非線形性を示す典型的な例である。これに対し、図 2・6(c) に示すような両端の支持位置で軸方向変位が拘束された場合は変形が大きくなり、中立面の曲率の非線形性は無視できる一方、中立面が軸方向に伸ばされ横方向の復元力に幾何学的な非線形復元力が生まれる。これらは、シェル、板、弦などの振動問題に共通して現れる幾何学的非線形特性であり<sup>23)</sup>、カオス振動の発生要因になるものである。レゾネータや原子間力顕微鏡（AFM）など基本的な構造要素が梁や板とみなせるものが多い、MEMS（micro-electromechanical system）や

NEMS (nano-electromechanical system) は、上記の非線形復元力に加えて、静電気力、ファンデルワールス力などの非線形力を受ける。また、タッピングモード AFM の特性は、試料と片持ち梁の衝突問題として解析される。衝突とともに接触力や摩擦力<sup>24)</sup>は機械系特有の自励振動や非線形振動を引き起こすが、様々なモデル化法が提案されている<sup>22)</sup>。

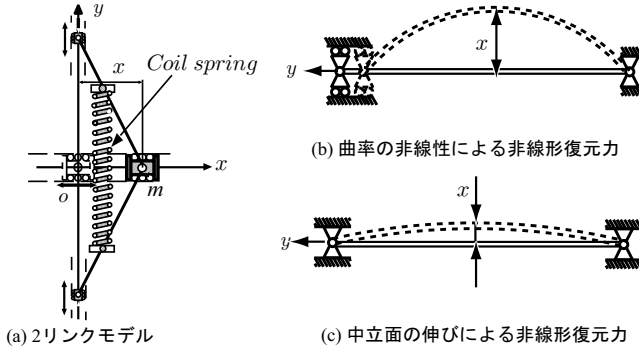


図 2-6 幾何学的非線形性

#### 2-2-4 レーザ系のカオス

(執筆者：内田淳史)[2009年4月受領]

レーザにおけるカオス現象の研究は、1975年に Haken によりレーザの時間的ダイナミクスを記述する Maxwell-Bloch 方程式と、カオスモデルの代表例である Lorenz モデルとの等価性が指摘されたことに端を発する<sup>25)</sup>。また 1979 年には、非線形媒質と時間遅延効果によりカオス的不規則振動が得られることが池田らにより指摘され、池田カオスとして知られている<sup>26)</sup>。更に非線形力学的観点から各種レーザにおけるクラス分けが行われ、系を支配する物理変数の数とレーザとの関連が指摘されている<sup>27)</sup>。

応用上では光ディスクや光通信において、半導体レーザへの戻り光がレーザの不安定出力変動を引き起こすことが大きな問題となっており、後に本現象がカオスであることが明らかとなった<sup>28)</sup>。応用上多く用いられる半導体レーザや固体レーザのダイナミクスは、電界振幅と反転分布密度(またはキャリア密度)の二変数で記述される。したがって単体のレーザではカオスの発生は観測されないが、これに時間遅延した戻り光や外部変調などの外的因子を加えることにより、システムは3変数以上となりカオス発生の必要条件を満たすことになる。半導体レーザや固体レーザには、電界振幅と反転分布密度との相互作用時間の逆数に相当する共振周波数が存在する。これは緩和発振周波数と呼ばれ、レーザの光子寿命、反転分布寿命(キャリア寿命)、励起強度により決定される。一般的に固体レーザでは kHz ~ MHz<sup>29)</sup>、半導体レーザでは GHz 程度<sup>28)</sup>の緩和発振周波数を有している。この緩和発振周波数に近い周波数成分が外部変調や時間遅延した戻り光などにより生成されると、緩和発振周波数と外部周波数との非線形な相互作用が生じ、カオスのレーザ出力振動が発生する。この不安定化の過程で観測される主な分岐現象は、準周期崩壊ルート(1周期 準周期 カオス)や周期倍分岐(1周期 2周期 4周期 8周期 ... カオス)などである。

半導体レーザーでは、レーザーの出射端面付近に外部鏡を設置してレーザー光を反射させ、レーザー自身へ時間遅延した光を戻すことにより、カオスの出力変動が発生する(図 2・7 参照)。戻り光を付加すると、戻り光の遅延時間の逆数に対応する周波数の共振モード(外部共振周波数)が出現する。例えば往復 30 cm の光伝搬距離だと 1 ns の光伝搬遅延時間となり、1 GHz の外部共振周波数となる。この外部共振周波数が半導体レーザーの緩和発振周波数と同程度の場合、レーザー発振モードの不安定化が生ずる。このダイナミクスは、時間遅延した戻り光を有する半導体レーザーを記述する Lang-Kobayashi 方程式により再現可能であり、決定論的カオスであることが知られている<sup>28)</sup>。半導体レーザーの緩和発振周波数は GHz と非常に高いため、レーザーカオスの不規則振動の中心周波数も GHz となり、ほかのカオス系に比べて高速である点がレーザーカオスの大きな特徴である。

レーザーカオスの高速性を活かした応用が近年提案されている。レーザーカオス同期を用いた光秘匿通信がその一例である。これは、カオスの出力変動するレーザー光にメッセージ信号を加えて送信し、受信側では受信信号からカオス同期により生成した元のカオス信号を差し引くことで、メッセージ信号を再現するという手法である<sup>30)</sup>。ヨーロッパでは国際プロジェクトの成果として、敷設された全長 120 km の光ファイバネットワーク上にて、2.4 Gb/s (Gigabit per second) の伝送速度での光カオス通信実験に成功している<sup>31)</sup>。更に、半導体レーザーカオスの高速性を利用した物理乱数生成器への応用が提案されている<sup>32)</sup>。従来の物理乱数生成器における生成速度は数百 Mb/s 程度が限界であったが、レーザーカオスを用いることにより、1 Gb/s 以上の生成速度での物理乱数生成に成功している。1.7 Gb/s の生成速度を有し、かつ十分なランダム性を有する物理乱数の実時間生成実験が報告されている<sup>32)</sup>。

以上のように、レーザーカオスは光特有の物理的特徴(高速性、伝搬特性等)を有しているため、レーザーカオスの特徴を活かした新規性あふれる工学応用分野の創出が非常に期待される研究分野である。

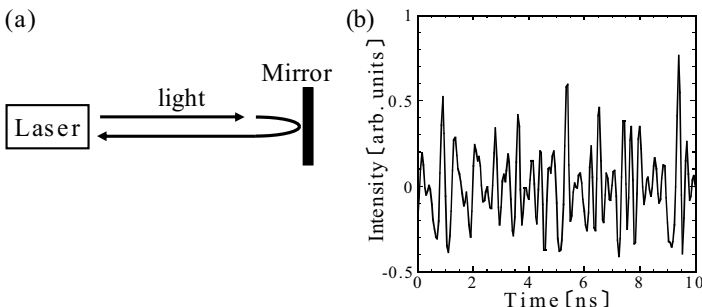


図 2・7 (a) 時間遅延した戻り光を有する半導体レーザーと、(b) レーザ出力強度の時間波形(ナノ秒単位)

#### 参考文献

- 1) T. Endo and T. Saito, "Chaos in electrical and electronic circuits and systems," Trans. IEICE, vol.E73, no.6, pp.763-771, 1990.
- 2) T. Kanamaru, "Duffing oscillator," Scholarpedia, vol.3, no.3, p.6327, 2008.

- 3) 川上博, “生体リズムの動的モデルとその解析,” コロナ社, 2001.
- 4) 斎藤利通, “1 個のダイオ-ドを含むカオス発生回路の族について,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J71-A, no.6, pp.1275-1282, 1988.
- 5) L.O. Chua, “Chua circuit,” Scholarpedia, vol.2, no.10, p.1488, 2007.
- 6) T. Saito, “Chaotic spiking oscillators,” Scholarpedia, vol.2, no.9, p.1831, 2007.
- 7) E.M. Izhikevich, “Bursting,” Scholarpedia, vol.1, no.3, p.1300, 2006.
- 8) C.K. Tse and M. di Bernardo, “Complex behavior in switching power converters,” Proc. IEEE, vol.90, pp.768-781, 2002.
- 9) S. Banerjee and G.C. Verghese, eds., “Nonlinear phenomena in power electronics: attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control,” IEEE Press, 2001.
- 10) 合原一幸, 神崎亮平, “理工学系からの脳科学入門,” 東京大学出版局, 2008.
- 11) M. Guevara, L. Glass, and A. Shrier, “Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells,” Science, vol.214, no.4527, pp.1350-1353, 1981.
- 12) H. Hayashi, M. Nakao, and K. Hirakawa, “Chaos in the self-sustained oscillation of an excitable biological membrane under sinusoidal stimulation,” Phys. Lett., vol.88A, no.5, pp.265-266, 1982.
- 13) H. Hayashi, S. Ishizuka, M. Ohta, and K. Hirakawa, “Chaotic behavior in the *Onchidium* giant neuron under sinusoidal stimulation,” Phys. Lett., vol.88A, no.8, pp.435-438, 1982.
- 14) G. Matsumoto, K. Aihara, M. Ichikawa, and A. Tasaki, “Periodic and nonperiodic responses of membrane potentials in squid giant axons during sinusoidal current stimulation,” J. Theor. Neurobiol., vol.3, pp.1-14, 1984.
- 15) D.R. Chialvo, R.F. Gilmour Jr., and J. Jalife, “Low dimensional chaos in cardiac tissue,” Nature, vol.343, no.6259, pp.653-657, 1990.
- 16) 林初男, “脳とカオス,” 裳華房, 2001.
- 17) H. Hayashi and S. Ishizuka, “Chaotic nature of bursting discharges in the *Onchidium* pacemaker neuron,” J. Theor. Biol., vol.156, no.3, pp.269-291, 1992.
- 18) H. Hayashi and S. Ishizuka, “Chaotic responses of the hippocampal CA3 region to a mossy fiber stimulation in vitro,” Brain Res., vol.686, no.2, pp.194-206, 1995.
- 19) S. Ishizuka and H. Hayashi, “Chaotic and phase-locked responses of the somatosensory cortex to a periodic medial lemniscus stimulation in the anesthetized rat,” Brain Res., vol.723, no.1-2, pp.46-60, 1996.
- 20) A. Skarda and W.J. Freeman, “How brains make chaos in order to make sense of the world,” Behav. Brain Sci., vol.10, no.2, pp.161-195, 1987.
- 21) I. Tsuda, “Dynamic link of memory - chaotic memory map in nonequilibrium neural networks,” Neural Networks, vol.5, no.2, pp.313-326, 1992.
- 22) S. Shaw and B. Balachandran, “A review of nonlinear dynamics of mechanical systems in year 2008,” J. System Design and Dynamics, Vol.2, No.3, pp.611-640, 2008.
- 23) A. Nayfeh and P. Pai, “Linear and nonlinear structural mechanics,” Wiley-Interscience, 2004.
- 24) F. Pfeiffer and C. Glocker, “Multibody dynamics with unilateral contacts,” Wiley-Interscience, 1996.
- 25) H. Haken, “Analogy between higher instabilities in fluids and lasers,” Phys. Lett. A, vol.53, pp.77-78, 1975.
- 26) K. Ikeda, “Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system,” Opt. Commun., vol.30, pp.257-261, 1979.
- 27) F.T. Arecchi, G.L. Lippi, G.P. Puccioni, and J.R. Tredicce, “Deterministic chaos in lasers with injected signal,” Opt. Commun., vol.51, pp.308-314, 1984.
- 28) J. Ohtsubo, “Semiconductor Lasers, - Stability, Instability and Chaos -,” Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

- 29) K. Otsuka, "Nonlinear Dynamics in Optical Complex Systems," KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1999.
- 30) A. Uchida, F. Rogister, J. Garcia-Ojalvo, and R. Roy, "Synchronization and communication with chaotic laser systems," Progress in Optics, edited by E. Wolf, vol.48, chap.5, pp.203-341, Elsevier, The Netherlands, 2005.
- 31) A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. Garcia-Ojalvo, C.R. Mirasso, L. Pesquera, and K.A. Shore, "Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links," Nature, vol.438, pp.343-346, 2005.
- 32) A. Uchida, K. Amano, M. Inoue, K. Hirano, S. Naito, H. Someya, I. Oowada, T. Kurashige, M. Shiki, S. Yoshimori, K. Yoshimura, and P. Davis, "Fast physical random bit generation with chaotic semiconductor lasers," Nature Photonics, vol.2, no.12, pp.728-732, 2008.

1 群 - 11 編 - 2 章

2-3 カオス時系列解析

(執筆: 平田祥人・池口 徹)[2011 年 1 月受領]

2-3-1 埋め込み定理

(1) タケンスの定理

埋め込み定理は、非線形時系列解析の基礎となる定理である。

$m$  次元の多様体上の状態  $x \in M$  があるとす。そこに、写像  $f: M \rightarrow M$  が与えられていて、 $x(t+1) = f(x(t))$  とする。しかし、このとき、 $x(t)$  の状態全体が観測できるわけではなく、ただか一次元の量が観測できる、つまり、 $\varphi: M \rightarrow R$  があり、 $s(t) = \varphi(x(t))$  が得られるだけであるという状況を考える。このとき、 $\{s(t)\}$  から  $x(t)$  が再構成できるかどうかというのが、埋め込み定理の考えている問題設定である。多くの  $\varphi$  について、 $\{s(t)\}$  から  $x(t)$  が再構成できるというのが、タケンス (Takens) の定理<sup>1)</sup>の趣旨である (図 2・8 参照)。

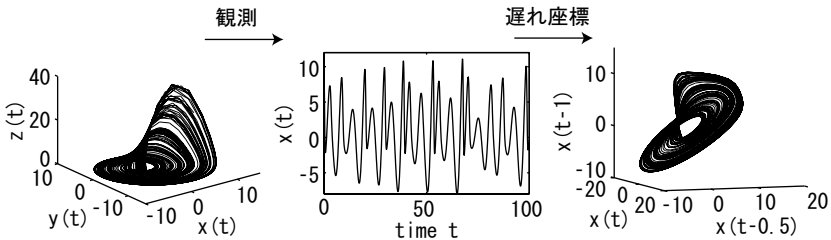


図 2・8 遅れ座標を使った埋め込みの例: レスラーアトラクタ

数学的に定理を述べる。タケンスの定理の記述は、論文<sup>2)</sup>によることにする。  
遅れ座標を

$$\Phi_d(x) = (\varphi(x), \varphi(f(x)), \dots, \varphi(f^{(d-1)}(x))) \tag{2・3}$$

とする。この遅れ座標が、 $x$  の再構成となるものである。

再構成の概念を数学的に述べたのが、埋め込みである。コンパクトな  $C^r$  級の多様体  $M$  と  $N$  が与えられているとする。このとき、 $\Psi: M \rightarrow N$  が埋め込みであるとは、 $\Psi$  が 1 対 1 であり、 $\Psi$  の微分も対応する空間上で 1 対 1 となることである。

タケンスの定理を数学的に述べる準備ができた。 $M$  上の  $C^r$  級の微分同窓写像の集合を  $\mathcal{D}^r(M)$  とする。同じく  $C^r$  級の観測関数  $\varphi$  の集合を  $C^r(M, R)$  とする。

タケンスの定理:  $m$  次元のコンパクトな多様体  $M$  があるとす。もしも  $d \geq 2m+1$  であるならば、 $\Phi_d(x)$  が埋め込みとなるような集合は、 $r \geq 1$  の  $\mathcal{D}^r(M) \times C^r(M, R)$  の中で開集合でかつ、稠密である。

埋め込み定理で注意が必要なのは、ある特定の  $\varphi$  については、埋め込みが成立しないことがあることである。

タケンスはこの他微分を用いた埋め込みに関しても提案している<sup>1)</sup>。

タケンスの定理をボックスカウンティング次元に拡張したサウエル (Sauer) の定理<sup>3)</sup>もある。

## (2) タケンスの定理の拡張

タケンスの定理は、外力が加わる系に対して拡張されている<sup>2)</sup>。また、ダイナミカルノイズの入った系に関する埋め込み定理<sup>4)</sup>やランダムな確率過程に従う系に関する埋め込み定理<sup>5)</sup>、パラメータの同定に関する定理<sup>6)</sup>が提案されている。これらの定理は、今後ニューロサイエンス、遺伝子ネットワーク、複雑ネットワークなどの応用上で重要な道具となっていくであろうと思われる。

## 2-3-2 リアプノフ指数

### (1) カオスと軌道不安定性

カオス力学系の重要な特徴の一つが、初期値鋭敏依存性 (sensitive dependence on initial conditions) である。カオス力学系に、ある初期値を与えた場合の解軌道を考える。次に、その初期値に微小な誤差を加えた第 2 の初期値を与えた場合の解軌道を考える。カオス力学系の初期値鋭敏依存性とは、二つの異なる初期値から始まる解はある一定の距離以上離れる時間が必ず存在するというものである。

初期値鋭敏依存性を定量化するためには、リアプノフ指数 (Lyapunov exponents) と呼ばれる指標を用いる。初期時刻における誤差を  $\epsilon_0$  とする。時刻  $t$  後には、この誤差は  $\epsilon_0 e^{\lambda t}$  に伸びる。この  $\lambda$  がリアプノフ指数である。 $\lambda < 0$  の場合は実際には縮むことになる。リアプノフ指数を用いると、予測の限界を定量的に表すこともできる。

### (2) 一次元力学系のリアプノフ指数

一次元離散時間力学系  $x(t+1) = f(x(t))$  のリアプノフ指数  $\lambda$  は、以下により定義される。

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log |f'(x(t))| \quad (2.4)$$

ただし、 $x(t)$  は時刻  $t$  における力学系の状態値を表している。

式 (2.4) を用いて、ロジスティック写像 ( $x(t+1) = ax(t)(1-x(t))$ ) のリアプノフ指数を計算した結果が、図 2.9(a) である。図 2.9(a) では、横軸にロジスティック写像のパラメータ  $a$  をとっている。図 2.9(a) の上図は分岐図であるが、カオス応答を示す領域において、 $\lambda > 0$  となることが分かる。

### (3) 多次元力学系のリアプノフ指数

多次元の力学系に対しては、リアプノフ指数の組 (リアプノフスペクトラム) を求めることになる。 $k$  次元力学系のリアプノフスペクトラムは、 $k$  個のリアプノフ指数  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, k)$  からなり、以下により定義される。

$$\lambda_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \sigma_i(N) \quad (2.5)$$

ただし、 $\sigma_i(N)$  は行列  $\left[ \left( \prod_{t=0}^N \mathbf{J}_t \right)^\dagger \left( \prod_{t=0}^N \mathbf{J}_t \right) \right]^{1/2N}$  の固有値であり、 $\mathbf{J}_t$  は、 $k$  次元力学系  $\mathbf{F}$  の時

刻  $t$  におけるヤコビ行列である．実際に数値計算する場合は, 式 (2・5) の定義は用いずに, 各イタレーションごとに正規直交化する手法 (QR 分解など) を用いるとよい<sup>7)</sup> .

この手法を用いて, レスラー方程式のリアプノフスペクトラムを計算し, 最大リアプノフ指数  $\lambda_1$  を計算した結果が, 図 2・9(b) である．横軸はレスラー方程式のパラメータ  $c$  である．図 2・9(a) の場合と同様に, カオス応答を示す領域において,  $\lambda_1 > 0$  となることが分かる．

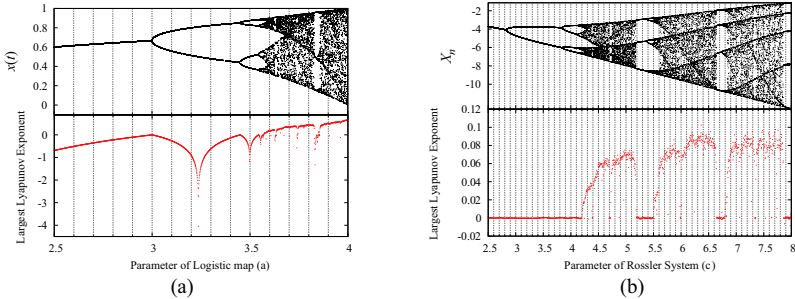


図 2・9 カオス力学系のパラメータを変えた場合の分岐図 (上図) とリアプノフ指数 (下図) の結果 (a) ロジスティック写像, (b) レスラー方程式

### 2-3-3 相関次元

#### (1) カオスアトラクタのフラクタル性

カオス力学系の重要な特徴の一つが, アトラクタのフラクタル性である．カオスアトラクタを対象とした場合, 相関次元 (correlation dimension) と呼ばれる指標がしばしば用いられる．相関次元を推定するためにいくつかの手法が提案されているが, この中でも相関積分 (correlation integral)<sup>8)</sup> による手法がよく用いられる．

#### (2) 相関積分

カオス力学系のアトラクタ (あるいは, タケンス埋め込みなどで再構成されたアトラクタ) 上の点を  $\nu(i) \in \mathbf{R}^m$  とすると, 相関積分は次のように定義される．

$$C^m(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^N I(r - |\nu(i) - \nu(j)|) \tag{2・6}$$

ただし,  $I(t)$  はステップ関数である．

#### (3) 相関次元

式 (2・6) により計算された相関積分が,  $C^m(r) \propto r^\nu$  のようにスケーリングされるとき, ケーリング指数  $\nu$  を相関次元 (correlation dimension) という．また, 実験データを対象とする場合, 真の次元値は未知である．そこで, 埋め込み次元  $m$  を大きくしながら相関積分を計算し,  $\nu$  が収束していく値を相関次元とする．

図 2・10(a) は, カオスの振る舞いを示すパラメータ値を用いた場合のローレンツ方程式に対する相関積分の計算結果である．図 2・10(b) は, ランダムな振る舞いを示すコバルト  $\gamma$  線放射射時間間隔データに対する結果である．ローレンツ方程式は 3 変数の常微分方程式で記述さ



れる．そのため，図 2・10(a) では，この三次元の状態空間を用いた場合にデータ数を  $N = 128$  から  $N = 32,768$  点までとした場合の結果を示している．一方，コバルトデータの場合は，データ数  $N = 21,437$  の 1 変数の時系列信号であるので，埋め込み次元を  $m = 2$  から  $m = 10$  まで変化させた場合の結果を示している．これらの結果を見ると，ローレンツ方程式の場合は，データ長の増加に伴い，相関積分の結果に対して求めた局所的な傾きは 2 ~ 2.5 程度の値に収束していることが分かる．一方，コバルトデータの場合，埋め込み次元  $m$  の増加に伴い，傾きの値も増加している．

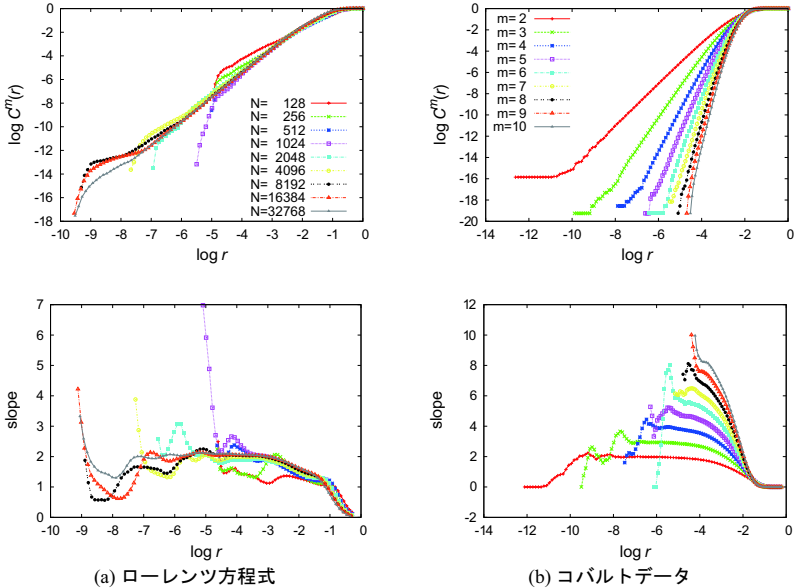


図 2・10 (a) ローレンツ方程式と (b) コバルト  $\gamma$  線放射時間間隔データに対する 相関積分の計算結果 (上図) と局所的な傾きの推定結果 (下図)

## 2-3-4 非線形予測

### (1) カオスと予測

カオス的な系は，決定論性があるため，将来の状態が過去の状態から完全に決まる．この意味において，カオス的な系では，短期予測ができる．

しかし，初期値鋭敏性により微小な誤差が拡大することと初期値の推定に誤差があることのため，長期予測はできない．そのため，カオス的な系において，予測として問題にできるのは，短期予測と中期予測である．

### (2) 短期予測

短期予測の手法としては，主に 2 種類の戦略がある<sup>9)</sup>．一つは局所モデル (local model)，もう一つは大域モデル (global model) である．

局所モデルとは，局所的に構築されたモデルである．最も単純な局所モデルを用いた予測

は、局所定数予測である。時系列  $x(t)$  が与えられているとする。この  $x(t)$  を遅れ座標を使って適切に埋め込んで  $y(t) = (x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(d-1)\tau))$  を得るものとする。今、現在の時刻を  $t$  とする。局所定数モデルを求めるためには、まず、過去の系列から状態の近い点を見つけてくる。数式で書くと、

$$N(t) = \{s = 1, 2, \dots, t-1 \mid \|y(t) - y(s)\| \leq \epsilon\}. \quad (2\cdot7)$$

ここで、 $\epsilon$  は近傍の大きさとする。そして、時刻  $t+1$  の局所定数予測  $\hat{x}(t+1)$  は、状態の近い点  $N(t)$  の次の点の平均で与えられる。つまり、

$$\hat{x}(t+1) = \frac{1}{|N(t)|} \sum_{s \in N(t)} x(s+1). \quad (2\cdot8)$$

局所定数予測を若干改良したのが、局所線形モデルである。局所線形モデルは、各近傍  $N(t)$  において、線形モデル

$$\hat{x}(t+1) = \sum_i a_i x(t-i) \quad (2\cdot9)$$

をフィッティングすることで求まる。フィッティングは、最小 2 乗法などを使うことで求めることができる。

局所線形モデルを更に発展させて局所非線形モデルを考えることも可能である。

局所モデルに対するのは、大域モデルである。大域モデルは、汎用性の高いモデルのパラメータをフィッティングすることにより得られる。

大域モデルの代表的例に、多項式モデル、動径基底関数、ニューラルネットワークがある。

多項式モデルは、実際の系の有限次数までのテーラー展開と考えることができる。

動径基底関数 (radial basis functions) は、一般に

$$\hat{x}(t+1) = \sum_i a_i \Phi(\|y(t) - c_i\|) \quad (2\cdot10)$$

で与えられる。ここで、 $\Phi$  は一般的には 0 で最大値をとる山型の関数を選ぶ。  $c_i$  は中心である。

ニューラルネットワークは、シグモイド関数を使って、

$$\hat{x}(t+1) = \sum_i \frac{a_i}{1 + \exp(b_i y(t) - c_i)} \quad (2\cdot11)$$

と定義される。

大域モデルのフィッティングに関しては、情報量基準<sup>10)</sup>やクロスヴァリデーション (cross validation) などを使って、基底関数の数を調整することにより、オーバーフィッティングを防いでモデルの汎化能力を維持する必要がある。

局所モデルは、データの点の数が多く、ノイズが少ないときに有効である。また、モデルに寄らないという利点と実装が楽であるという利点がある。しかし、計算に時間がかかるとい

う問題がある．それに、対して、大域モデルは、分岐解析などにも使える<sup>11, 12)</sup>というメリットがある．しかし、対象とする系が連続である必要がある．

### (3) 中期予測

中期予測には、大きく分けて 2 種類の戦略がある．一つは直接予測、もう一つは再帰予測である．

直接予測とは、短期予測の手法の予測ステップだけを変更しそのまま用いる手法である．短期予測では、一般的に  $x(t+1) = \phi(y(t))$  となる関数をつくった．直接予測では、 $x(t+p) = \phi_p(y(t))$  となる関数  $\phi_p$  をつくる．

それに対して、再帰予測では、短期予測のモデルを繰り返し用いることで、中期予測を得る．

一般に、良い短期予測モデルが手元にあるときには、再帰予測の方が有効であるようである．

中期予測を更に向上される方法として、サイファイ ( $\xi\phi$ ) 法<sup>13)</sup>がある．この手法では、まず、再帰予測を使って、 $q$  ステップ先 ( $1 \leq q \leq Q$ ) の予測を仮につくる．このときの  $q$  ステップ先の予測を  $\phi^q(y(t))$  とする． $z(t) = (\phi^1(y(t)), \phi^2(y(t)), \dots, \phi^Q(y(t)))$  とする．次に、 $z(t)$  から  $x(t+p)$  を推定する関数をフィッティングする．つまり、 $x(t+p) = \xi(z(t))$  となる関数  $\xi$  を作成する．この関数  $\xi$  より、再帰予測の各ステップで蓄積するモデル誤差を補正し、予測を改善することができる．

## 2-3-5 リカレンスプロット

### (1) 定義

リカレンスプロット (recurrence plots)<sup>14, 15)</sup>は、元々時系列を視覚化するための 2 次元平面図である．縦軸横軸ともに時間軸である．二つの対応する時間の状態が近ければ平面図の対応する場所に点を打ち、近くなければ点を打たない．エックマンら<sup>14)</sup>によって最初に提案されたときには、 $k$  個の近傍点を使ってリカレンスプロットが定義されていた．しかし、現在の一般的な定義は、しきい値  $\epsilon$  を使った以下の定義である： $d$  次元時系列を  $x(t) \in \mathbf{R}^d (t = 1, 2, \dots, T)$  とする． $\Theta(y)$  をヘビサイド関数、つまり、 $y > 0$  のとき  $\Theta(y) = 1$ 、 $y \leq 0$  のとき  $\Theta(y) = 0$  と定義する．このとき、リカレンス行列  $R_{i,j}(\epsilon)$  は、 $R_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - \|x(i) - x(j)\|)$  と定義される．対応するリカレンスプロットでは、 $R_{i,j}(\epsilon) = 1$  のとき  $(i, j)$  に点を打ち、 $R_{i,j}(\epsilon) = 0$  のとき  $(i, j)$  に点を打たない．ノルム  $\|\cdot\|$  としては、 $L^1$  ノルム ( $\|z\|_1 = \sum_i |z_i|$ )、 $L^2$  ノルム ( $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_i z_i^2}$ )、 $L^\infty$  ノルム ( $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$ ) などがよく用いられる．

距離が定義できればリカレンスプロットを作成することができるので、点過程データに対してもリカレンスプロットが定義されている<sup>16)</sup>．

### (2) 点のパターン

リカレンスプロットの例を図 2-11 に示す．

リカレンスプロットの中央には、左下から右上に向かって、1 本の線が現れる．これは、同じ時間では、状態が同じであるため、距離が 0 になるからである．この線は、英語では、Line of Identity (LOI) と呼ばれている．LOI を挟んで、リカレンスプロットは、線対称になる．

時系列が定常なとき、リカレンスプロット上で点は一樣に広がる．非定常なとき、点の分布に偏りができる．

正弦波やロジスティック写像などの決定論的な系から生成された時系列のリカレンスプロット

トには、LOI 以外に LOI と平行な線分が多く現れる．決定論的な時系列では、二つの異なる時刻の点がいったん近傍に入ると、その後の変化をそれぞれ時間軸に沿って見ていくと、しばらく近傍に留まり続ける．そのため、決定論的な時系列から求めたリカレンスプロットには、LOI に平行な斜めの線が現れやすい．時系列がガウスノイズなど確率過程に従い、前後の時間に関係がない場合、そのリカレンスプロットにはこのような線分は（埋め込み次元とサンプリング間隔を適切に選んでいれば）現れにくい．

リカレンスプロットに現れる線分は、大きく分けるとほかにもう 2 種類ある．一つは、左上から右下の方向に伸びる斜め線分である．この線分は、二つの対応する時間の区間で、一方の区間の時間を逆向きにしたとき、もう一方と似た変化になっている場合に現れる．

もう一つの線分は、縦横に伸びる線分である．この線分は、層流 (laminar) 状になっているときに現れる．

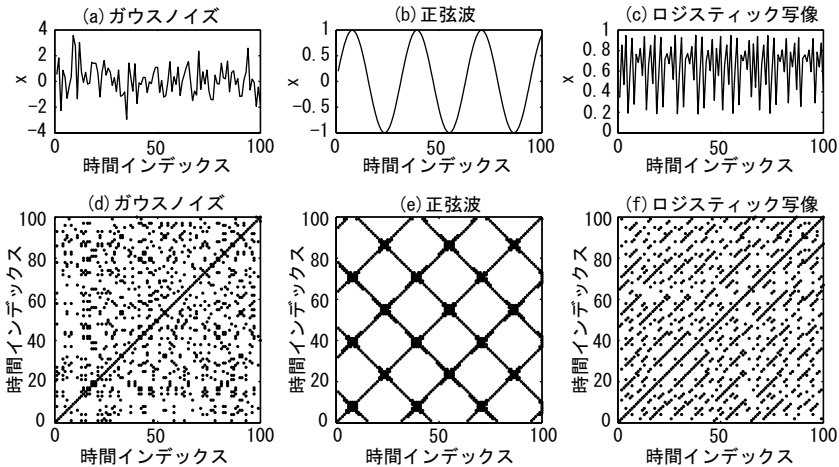


図 2-11 リカレンスプロットの例．(a)(b)(c) 元の時系列と (d)(e)(f) 対応するリカレンスプロット．(a)(d) はガウスノイズ，(b)(e) は正弦波，(c)(f) はロジスティック写像．10%の組の点が打たれるように、しきい値を調整した

### (3) 定量化

1990 年代前半から点のパターンを定量化する研究が精力的に行われている．

よく使われる定量化の指標は、DET<sup>15)</sup>である．DET は、打たれている点のうち、LOI と平行な線分をなす点の割合である．LOI に平行な斜めの線は、決定論的な時系列の場合に典型的に現れることから、DET は決定論性の指標として用いられる．また、LOI に平行な線分の長さの最大値は、軌道の誤差の指数的な拡大と関係しているといわれている<sup>15)</sup>．

縦横に伸びる線分の定量化も進んでいる<sup>17)</sup>．

また、リカレンスプロットから相関次元、相関エントロピーが求められることが知られている<sup>18,19)</sup>．この事実から、リカレンスプロットには、元の時系列に関する多くの情報量が含まれていることが分かる．実際に、リカレンスプロットから元の時系列の概形を復元するこ

とができる<sup>20, 21, 22</sup>。また、二つの時系列のリカレンスプロットが同じとき、それらの背後のダイナミクスが等価であることが証明されている<sup>23</sup>。

#### (4) 外力の再構成

リカレンスプロットは、時間的な変化の遅い外力の再構成にも応用されている<sup>24, 22, 25</sup>。基本的な戦略は、以下の要領である。まず、十分大きな埋め込み次元を用いてリカレンスプロットを求めると、外力のリカレンスプロットとよく似たリカレンスプロットが得られる。このリカレンスプロットから時系列を復元することで外力の時系列が再構成できる。

#### (5) 多次元データへの拡張

リカレンスプロットは、2通りの方法で多次元の時系列データの解析のために拡張されている。一つは、クロスリカレンスプロット (cross recurrence plots)<sup>26, 27</sup>である。クロスリカレンスプロットは、二つの時系列  $x(t), y(t) \in \mathbf{R}^d$  が与えられているとき、クロスリカレンス行列  $C_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - \|x(i) - y(j)\|)$  によって与えられる。 $x(i)$  と  $y(j)$  で似た変化が起きているところで、左下から右上に向けた斜めの線分が現れる。

もう一つの拡張は、ジョイントリカレンスプロット (joint recurrence plots)<sup>28</sup>である。ジョイントリカレンス行列  $J_{i,j}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  は、二つの時系列のリカレンス行列  $R_{i,j}^1(\epsilon_1)$  と  $R_{i,j}^2(\epsilon_2)$  から、 $J_{i,j}(\epsilon_1, \epsilon_2) = R_{i,j}^1(\epsilon_1)R_{i,j}^2(\epsilon_2)$  と定義される。二つの時系列が同期しているとき、ジョイントリカレンスプロットの点の打たれる割合 (リカレンスレート) が高くなる。

リカレンスプロットを使ったネットワークトポロジーの同定法が提案されている<sup>29, 30, 31</sup>。

### 2-3-6 決定論性の解析

時系列の将来が過去の系列から完全に予測できるとき、時系列は決定論的であるという<sup>32</sup>。決定論性の解析は、時系列の将来が過去の系列に依存するかどうかを示すことを目的としている。

決定論性の解析は大きく分けて 3 種類の方法がある。

#### (1) 非線形予測誤差を使う方法

最も古く提案された方法は、非線形モデルを用いたときの予測誤差を使う方法である<sup>33</sup>。決定論的カオスから生成された時系列の場合、予測ステップを大きくしていったときに予測誤差は大きくなっていく。確率的なノイズの場合には、予測ステップを大きくしていても予測誤差に変化はない。

#### (2) ダイナミクスの連続性を使う方法

決定論性の方法として提案されている多くの方法は、ダイナミクスの連続性を使う。典型的な例として、ここでは、ウェイランド統計<sup>34</sup>についてまとめる。

今、一次元時系列  $\{s_t\}_{t=1}^N$  が与えられているとする。それを遅れ  $\tau$ 、埋め込み次元  $d$  を使って埋め込み、 $x_t = (s_t, s_{t-\tau}, \dots, s_{t-(d-1)\tau})(t = (d-1)\tau + 1, \dots, N)$  を得る。

$(d-1)\tau + 1$  と  $N-1$  の間から  $l$  個の整数を選び、集合  $T$  をつくる。それぞれの  $t \in T$  について、 $x_t$  の  $k$  個の最近傍点を選び、小さな順に並べ、 $i$  番目の近傍点のインデックスを  $n_i(t)$  とする。

それぞれの  $x_{n_i(t)}$  とその  $m$  個先の点  $x_{n_i(t)+m}$  との差をとり、 $v_i(t) = x_{n_i(t)+m} - x_{n_i(t)}$  と定義する。この  $v_i(t)$  を推移ベクトル (translation vector) と呼ぶ。推移ベクトルは  $m$  ステップの間の変化量を表す。推移ベクトルの  $i$  に関する平均を求めて  $v$  とする：

$$v(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i(t). \quad (2 \cdot 12)$$

推移誤差  $e(t)$  は,

$$e(t) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{\|v_i(t) - v(t)\|^2}{\|v(t)\|^2} \quad (2 \cdot 13)$$

である。この  $e(t)$  は、 $x(t)$  の近傍の点が  $m$  ステップの間にどのくらいパラバラに広がるかを示す指標である。 $e(t)$  は、 $v_i(t)$  が揃っているほど、0 に近い小さな値を持つ。ウェイランド統計は、 $e(t)$  の  $T$  に関する中央値として得られる。

ウェイランド統計を用いると、決定論性の強い時系列に対しては 0 に近い値が得られ、決定論性のない時系列では 1 に近い大きな値が得られる。

ウェイランド統計を大きな観測ノイズを含んだ時系列や高次元のシステムから生成された時系列に適用する場合、ランダムシャッフルサロゲート（サロゲートデータ法の項参照）から求めたウェイランド統計よりも大きくなることもある<sup>35)</sup>。そのため、値が大きめに出たときは、結果の解釈には若干注意を要する。

### (3) リカレンスプロットを用いる方法

リカレンスプロットを使った決定論性の解析が二つ提案されている。一つはリカレンスプロットの項目で挙げた DET<sup>15)</sup>、もう一つは同方向性リカレンスプロットを用いた  $R$ <sup>36)</sup> である。ここでは、 $R$  について解説する。

同方向性リカレンスプロットとは、時系列  $x(i)$  の差分  $x(i+1) - x(i)$  を用いて求めたリカレンスプロットである。同方向的近傍プロットは、リカレンスプロットと同方向性リカレンスプロットのジョイントリカレンスプロットとして定義される。 $R$  は、(同方向的近傍プロットの点の割合)/(リカレンスプロットの点の割合)として定義される。この  $R$  もウェイランド統計と同様に近傍の点の変化の方向がどのくらい揃っているかを示す指標と考えられる。

$R$  を用いると、ウェイランド統計と同様に決定論性の評価が行える。

### (4) 決定論性解析上の注意

決定論性の解析で求めた値そのものを使って決定論性を議論するのは、危険である。解析の方法のパラメータの選び方や解析するデータによって、様々な値が出てくる可能性があるからである。そのため、サロゲートデータ法と併用して、結果を議論する必要がある。

## 2-3-7 サロゲートデータ法

### (1) 仮説検定

サロゲートデータ (surrogate data) 法は、仮説検定の設計法である。仮説検定とは、仮説が正しいかどうか統計的に調べる手法である。サロゲートデータ法の特徴は、仮説に従うデータ (サロゲートデータ) を大量に生成することで仮説検定を設計するところにある。大量のデータを生成するという点で、サロゲートデータは統計科学におけるモンテカルロ法の一種とみなせる。

サロゲートデータというと、非線形科学の分野で使われる手法を想起させることが多いようであるが、サロゲート (surrogates) という言葉自身は、ニューロサイエンスの分野でも (仮

説こそ違おうが) 同じ意味で使われている (例えば, 池谷ら<sup>37)</sup>).

サロゲートデータ法は, 一般に以下の手順で検定を行う: (i) まず, 帰無仮説と棄却水準  $\alpha$  を決める. (ii) 次に, 元のデータから帰無仮説に従うサロゲートデータを片側検定の場合  $(1/\alpha - 1)$  個, 両側検定の場合  $(2/\alpha - 1)$  個生成する. (iii) 元のデータとサロゲートデータについて, ある検定統計量を計算する. (iv) 元のデータから求めた検定統計量が, サロゲートデータから求めた検定統計量の最大値と最小値によって指定される範囲から外れていれば, 帰無仮説は棄却される. 外れていなければ, 棄却されない.

## (2) 各種のサロゲートデータ

過去の研究の積み重ねにより, 今までに様々なサロゲートデータが, 提案されてきた. ここでは, 用途ごとにサロゲートデータ法をまとめる.

### (a) 系列依存性

系列依存性とは, 将来の系列が過去の系列に依存することである. 将来の系列が過去の系列に全く依存しないとき, 決定論的な数理モデルを用いても有益な情報は得られない.

系列依存性は, ランダムシャッフルサロゲート (random shuffle surrogates)<sup>38)</sup> を用いることで調べられる. ランダムシャッフルサロゲートは, 時系列の時間順序をランダムに入れ替えることで作成できる. このときの帰無仮説は, 「時系列に系列依存性はない」である.

### (b) 非線形性

非線形性は, 時系列がカオスかどうかを調べる際に最もよく調べられている性質である. 線形性は, 時系列のパワースペクトルによって特徴づけられる. よって, 非線形性を検定するためのサロゲートデータは, 基本的にはパワースペクトルを保存して位相をランダム化することで作成できる<sup>39, 40)</sup>.

非線形性の検定のためのサロゲートデータ法に関しては, シュレイバーとシュミット<sup>41)</sup>や池谷ら<sup>42)</sup>の説明が詳しいので, より詳しく調べたい読者は, 参考にしてほしい.

また, 非線形性検定のためのサロゲートデータ法は, 多次元データにも拡張されている<sup>43, 41)</sup>.

### (c) 周期性を越えた決定論性

周期性の強い時系列が与えられたとき, 周期性以上に強い決定論性があるかどうか, 関心の的になる. このような場合に関しても, いくつかのサロゲートデータ法が用意されている.

スモールら<sup>44, 45)</sup>の手法では, 帰無仮説は, 「時系列は, 擬周期性以上の決定論性を持たない」である. サロゲートデータは, 以下のようにしてつくられる: (i) まず, 時系列を適切に埋め込む. 埋め込んだ時系列を  $y(t)$  と書くことにする. (ii) 次に, 最初の点  $s(1)$  を埋め込んだ時系列から一つ選ぶ. これを現在の点と呼ぶことにする. (iii) 次の計算を時系列の長さが元の時系列の長さと同くなるまで繰り返す: 現在の点を  $s(i)$  とする.  $\exp(-\|y(t) - s(i)\|/\rho)$  に比例する分布に従って, 埋め込んだ時系列の中から 1 点  $y(t)$  を選び, その点の次の点  $y(t+1)$  を次の現在の点  $s(i+1)$  とする.

ルオラ<sup>46)</sup>の手法では, 周期的な時系列は, 時間をずらして足し合わせても周期的になることを利用してサロゲートデータをつくる.

### (d) 同期性

二つの時系列が同期しているかどうかを検定するためのサロゲートデータ, ツインサロゲート (twin surrogates) が提案されている<sup>47)</sup>. ツインサロゲートは, リカレンスプロットを用いて生成される. リカレンスプロットには, ツインと呼ばれる, 点のパターンが全く同じ列

が存在する．ツインサロゲートを生成するときには、まず、最初の時間インデックス  $i(1)$  を決める．そして、次の操作を繰り返す：現在の時間インデックス  $i(j)$  にツインが存在していなければ、次の時間インデックス  $i(j+1)$  を次の点  $i(j+1)$  とする．もし、ツインが存在していれば、現在の時間インデックスがツインの時間インデックスをランダムに選び、選ばれた時間インデックス  $k$  の次の時間インデックス  $k+1$  を次の点  $i(j+1)$  にする．論文<sup>47)</sup>には、このアルゴリズムを使うと、「ダイナミクスが同じで初期値だけが違うサロゲートデータ」を生成することができる」と説明されている．

同期を示すために、ツインサロゲートは以下のように使用できる：(i) まず、二つの時系列  $x$  と  $y$  のうち一つの時系列  $x$  を十分大きな埋め込み次元を用いて埋め込み、リカレンスプロットを求める．(ii) リカレンスプロットから、ツインサロゲート  $t_i (i = 1, 2, \dots, 2/\alpha - 1)$  を  $(2/\alpha - 1)$  個作成する．(iii)  $x$  と  $y$  に関する同期の指標  $S(x, y)$  を求める．(iv)  $t_i$  と  $y$  に関する同期の指標  $S(t_i, y)$  を求める．(v)  $S(x, y)$  が  $S(t_i, y)$  の最大値と最小値の範囲から外れていれば、帰無仮説である「同期はない」が棄却される．

#### (e) トレンドがある場合

仮説検定は、仮説の条件のうちどこが間違っている場合でも棄却される可能性がある．そのため、結果の解釈は慎重に行う必要がある．例えば、多くのサロゲートデータ法では、元のデータの定常性を仮定している．この仮定が満たされているかどうかは、ケンネル<sup>48)</sup>の方法などを使って確かめる必要がある．

非定常な場合でも、トレンドがあるだけの場合に関しては、系列相関<sup>49, 50)</sup>と非線形性<sup>51)</sup>を調べるためのサロゲートデータ法が提案されている．

#### (f) より一般の性質のサロゲートデータ生成法

より一般の帰無仮説に従うサロゲートデータの生成方法が、シュレイパー<sup>52)</sup>によって提案された．より一般の帰無仮説に従うサロゲートデータを生成するには、まず帰無仮説が正しいときに小さな値になるコスト関数を決める．続いて、時系列の順序をランダムに入れ替える．そして、シミュレーティッドアニーリングを用いて、時系列の順序を少しずつ入れ替えながら、コスト関数を小さくしていく．この手法を用いて、時系列の間隔が一定でないときの非線形性検定のためのサロゲートデータ<sup>53)</sup>や神経活動のコーディング仮説を検定するサロゲートデータ<sup>54)</sup>が提案された．

### (3) 検定統計量の選び方

検定統計量の選び方は、重要である．検定統計量によって、検定の棄却力が決まる．系列依存性や非線形性の検定には、相関次元やウェイランド統計、予測誤差、高次統計量等がよく用いられる．

検定統計量が帰無仮説に含まれるすべての過程で等しいとき、検定統計量はピボット (pivotal) と呼ばれる<sup>55)</sup>．サロゲートデータが典型的な実現としてつくられる場合、つまり、元の時系列からモデルのパラメータを推定しそのパラメータを使ったシミュレーションによってサロゲートデータを生成する場合、検定統計量がピボットである必要がある．検定統計量がピボットでない場合には、棄却力が落ちる．しかし、サロゲートデータがある量を保存してつくられるときは、検定統計量はピボットである必要はない<sup>55)</sup>．系列依存性や非線形性検定のためのサロゲートデータ法の多くは、特徴量を保存してつくられているために、検定統計量がピボットである必要はない．



## 参考文献

- 1) F. Takens, "Detecting strange attractors in turbulence," in *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick, 1980, vol.898 of Lecture Notes in Mathematics, edited by D.A. Rand and L.S. Young, Springer, Berlin, pp.366-381, 1981.
- 2) J. Stark, "Delay embeddings for forced systems I. Deterministic forcing," *J. Nonlinear Sci.* vol.9, No.3, pp.255-332, 1999.
- 3) T. Sauer, J.A. Yorke, and M. Casdagli, "Embedology," *J. Stat. Phys.*, vol.65, no.3-4, pp.579-616, 1991.
- 4) M.R. Muldoon, D.S. Broomhead, J.P. Huke, and R. Hegger, "Delay embedding in the presence of dynamical noise," *Dynamics and Stability of Systems*, vol.13, no.2, pp.175-186, 1998.
- 5) J. Stark, D.S. Broomhead, M.E. Davies, and J. Huke, "Delay embeddings for forced systems II. Stochastic forcing," *J. Nonlinear Sci.*, vol.13, no.6, pp.519-577, 2003.
- 6) E.D. Sontag, "For differential equations with  $r$  parameters,  $2r+1$  experiments are enough for identification," *J. Nonlinear Sci.*, vol.12, no.6, pp.553-583, 2002.
- 7) I. Shimada and T. Nagashima, "A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems," *Prog. Theor. Phys.*, vol.61, no.6, pp.1605-1616, 1979.
- 8) P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the strangeness of strange attractors," *Physica*, vol.9D, pp.189-208, 1983.
- 9) H. Kantz and T. Schreiber, "Nonlinear time series analysis," Cambridge, 1997.
- 10) T. Nakamura, K. Judd, A.I. Mees, and M. Small, "A comparative study of information criteria for model selection," *Int. J. Bifurcat. Chaos*, vol.16, no.8, pp.2153-2175, 2006.
- 11) R. Tokunaga, S. Kajiwara, and T. Matsumoto, "Reconstructing bifurcation diagrams only from time-waveforms," *Physica D*, vol.79, no.2-4, pp.348-360, 1994.
- 12) E. Bagarinao Jr., K. Pakdaman, T. Nomura, and S. Sato, "Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear autoregressive models," *Phys. Rev. E*, vol.60, no.1, pp.1073-1076, 1999.
- 13) K. Judd and M. Small, "Towards long-term prediction," *Physica D*, vol.136, No.1-2, pp.31-44, 2000.
- 14) J.P. Eckmann, S.O. Kamphorst, and D. Ruelle, "Recurrence plots of dynamical systems," *Europhys. Lett.*, vol.4, no.9, pp.973-977, 1987.
- 15) N. Marwan, M.C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths, "Recurrence plots for the analysis of complex systems," *Phys. Rep.*, vol.438, no.5-6, pp.237-329, 2007.
- 16) S. Suzuki, Y. Hirata, and K. Aihara, "Definition of distance for marked point process data and its application to recurrence plot-based analysis of exchange tick data of foreign currencies," *Int. J. Bifurcat. Chaos*, in press.
- 17) N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, and J. Kurths, "Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data," *Phys. Rev. E*, vol.66, no.2, Article Number 026702, 2002.
- 18) P. Faure and H. Korn, "A new method to estimate the Kolmogorov entropy from recurrence plots: its application to neuronal signals," *Physica D*, vol.122, no.1-4, pp.265-279, 1998.
- 19) M. Thiel, M.C. Romano, P.L. Read, and J. Kurths, "Estimation of dynamical invariants without embedding by recurrence plots," *Chaos*, vol.14, no.2, pp.234-243, 2004.
- 20) M. Thiel, M.C. Romano, and J. Kurths, "How much information is contained in a recurrence plot?" *Phys. Lett. A*, vol.330, no.5, pp.343-349, 2004.
- 21) M. Thiel, M.C. Romano, J. Kurths, M. Rofls, and R. Kliegl, "Generating surrogates from recurrences," *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol.366, no.1865, pp.545-557, 2008.
- 22) Y. Hirata, S. Horai, and K. Aihara, "Reproduction of distance matrices and original time series from recurrence plots and their applications," *Euro. Phys. J. Spec. Top.*, vol.164, pp.13-22, 2008.

- 23) G. Robinson and M. Thiel, "Recurrence determine the dynamics," *Chaos* vol.19, Article Number 023104, 2009.
- 24) M.C. Casdagli, "Recurrence plots revisited," *Physica D*, vol.108, No.1-2, pp.12-44, 1997.
- 25) M. Tanio, Y. Hirata, and H. Suzuki, "Reconstruction of driving forces through recurrence plots," *Phys. Lett. A*, vol.373, pp.2031-2040, 2009.
- 26) J.P. Zbilut, A. Giuliani, C.L. Webber Jr., "Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross-recurrence quantification," *Phys. Lett. A*, vol.246, no.1-2, pp.122-128, 1998.
- 27) N. Marwan and J. Kurths, "Nonlinear analysis of bivariate data with cross recurrence plots," *Phys. Lett. A*, vol.302, no.5-6, pp.299-307, 2002.
- 28) M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, and W. von Bloh, "Multivariate recurrence plots," *Phys. Lett. A*, vol. 330, no.3-4, pp.214-223, 2004.
- 29) M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, and C. Grebogi, "Estimation of the direction of the coupling by conditional probabilities of recurrence," *Phys. Rev. E*, vol.76, Article Number 036211, 2007.
- 30) Y. Hirata and K. Aihara, "Identifying hidden common causes from bivariate time series: A method using recurrence plots," *Phys. Rev. E*, vol.81, Article Number 016203, 2010.
- 31) J. Nawrath, M.C. Romano, M. Thiel, I.Z. Kiss, M. Wickramasinghe, J. Timmer, J. Kurths, and B. Schelter, "Distinguishing direct from indirect interactions in oscillatory network with multiple time scales," *Phys. Rev. Lett.*, vol.104, Article Number 038701, 2010.
- 32) C. Chatfield, "The analysis of time series: An introduction," Chapman & Hall/CRC, 2004.
- 33) G. Sugihara and R.M. May, "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series," *Nature*, vol.344, no.6268, pp.734-741, 1990.
- 34) R. Wayland, D. Bromley, D. Pickett, and A. Passamante, "Recognizing determinism in a time-series," *Phys. Rev. Lett.*, vol.70, no.5, pp.580-582, 1993.
- 35) Y. Hirata, S. Horai, H. Suzuki, and K. Aihara, "Testing serial dependence by random-shuffle surrogates and the Wayland method," *Phys. Lett. A*, vol.370, no.3-4, pp.265-274, 2007.
- 36) 實来俊介, 山田泰司, 合原一幸, "同方向性リカレンスプロットによる決定論性解析," *電気学会論文誌 C*, vol.122-C, no.1, pp.141-147, 2002.
- 37) Y. Ikegaya, G. Aaron, R. Cossart, D. Aronov, I. Lampl, D. Ferster, and R. Yuste, "Synfire chains and cortical songs: Temporal modules of cortical activity," *Science*, vol.304, no.5670, pp.559-564, 2004.
- 38) J.A. Scheinkmann and B. LeBaron, "Nonlinear dynamics and stock returns," *J. Business*, vol.62, no.3, pp.311-337, 1989.
- 39) J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer, "Testing for nonlinearity in time-series: the method of surrogate data," *Physica D*, vol.58, No.1-4, pp.77-94, 1992.
- 40) T. Schreiber and A. Schmitz, "Improved surrogate data for nonlinear test," *Phys. Rev. Lett.*, vol.77, no.4, pp.635-638, 1996.
- 41) T. Schreiber and A. Schmitz, "Surrogate time series," *Physica D*, vol.142, no.3-4, pp.346-382, 2000.
- 42) 池口 徹, 山田泰司, 小室元政, "カオス時系列解析の基礎と応用," 産業図書, 2000.
- 43) D. Prichard and J. Theiler, "Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables," *Phys. Rev. Lett.*, vol.73, no.7, pp.951-954, 1994.
- 44) M. Small, D.J. Yu, and R.G. Harrison, "Surrogate test for pseudoperiodic time series," *Phys. Rev. Lett.*, vol.87, no.18, Article Number 188101, 2001.
- 45) M. Small, "Applied nonlinear time series analysis: applications in physics, physiology and finance," World Scientific 2005.
- 46) X. Luo, T. Nakamura, and M. Small, "Surrogate test to distinguish between chaotic and pseudoperiodic time series," *Phys. Rev. E*, vol.71, no.2, Article Number 026230, 2005.
- 47) M. Thiel, M. C. Romano, J. Kurths, M. Rolf, and R. Kliegl, "Twin surrogates to test for complex

- synchronisation,” *Europhys. Lett.*, vol.75, no.4, pp.535-541, 2006.
- 48) M.B. Kennel, “Statistical test for dynamical nonstationarity in observed time-series data,” *Phys. Rev. E*, vol.56, no.1, pp.316-321, 1997.
- 49) T. Nakamura and M. Small, “Small-shuffle surrogate data: Testing for dynamics in fluctuating data with trends,” *Phys. Rev. E*, vol.72, no.5, Article Number 056216, 2005.
- 50) T. Nakamura, Y. Hirata, and M. Small, “Testing for correlation structures in short-term variabilities with long-term trends of multivariate time series,” *Phys. Rev. E*, vol.74, no.4, Article Number 041114, 2006.
- 51) T. Nakamura, M. Small, and Y. Hirata, “Testing for nonlinearity in irregular fluctuations with long-term trends,” *Phys. Rev. E*, vol.74, no.2, Article Number 026205, 2006.
- 52) T. Schreiber, “Constrained randomization of time series data,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.80, no.10, pp.2105-2108, 1998.
- 53) A. Schmitz and T. Schreiber, “Testing for nonlinearity in unevenly sampled time series,” *Phys. Rev. E*, vol.59, no.4, pp.4044-4047, 1999.
- 54) Y. Hirata, Y. Katori, H. Shimokawa, H. Suzuki, T.A. Blenkinsop, E.J. Lang, and K. Aihara, “Testing a neural coding hypothesis using surrogate data,” *J. Neurosci. Meth.*, vol.172, no.2, pp.312-322, 2008.
- 55) J. Theiler and D. Prichard, “Constrained-realization Monte-Carlo method for hypothesis testing,” *Physica D*, vol.94, no.4, pp.221-235, 1996.

## 1 群 - 11 編 - 2 章

## 2-4 カオスの工学的応用

## 2-4-1 カオス同期

(執筆者: 徳田 功)[2009 年 4 月 受領]

二つのカオス力学系がなんらかのかたちで相互結合したモデルについて考える。個々の力学系を部分系と呼び、それぞれの力学変数を  $\mathbf{X}_1(t)$ ,  $\mathbf{X}_2(t)$  と表記することにする。このとき、部分系の間働く作用が互いにどのような影響を及ぼしあうか、特に、部分系どうしが引込みによって同期現象を起こすかは、興味深い力学問題の一つである。また、カオス同期は秘話通信などの工学技術へも活用されており、応用性も高い<sup>1)</sup>。カオス力学系における同期現象は大きく分けると四つのタイプ、すなわち、(1) 完全同期<sup>2,3)</sup>、(2) 一般化同期<sup>4,5)</sup>、(3) 位相同期<sup>6)</sup>、(4) 遅延同期<sup>7)</sup> に分類することができる。本節では、完全同期及び位相同期について取り上げ、以下、順を追って紹介してゆくことにする。

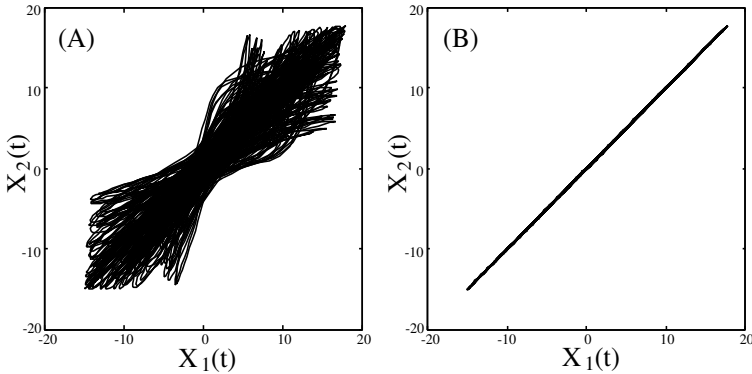


図 2-12 結合レーザーモデル (2-14) に対するリサージュ図 (横軸:  $x_1(t)$ , 縦軸:  $x_2(t)$ )。 (A)  $C = 0.05$ , (B)  $C = 0.2$ 。

カオス同期の最も基本である完全同期は、二つの等価な部分系の間において、 $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t)$  の関係が生ずる現象を指す。二つのレーザー方程式の結合した以下のモデルを用いて、カオスの完全同期の具体例を示す。

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + C(x_{2,1} - x_{1,2}), \\
 \frac{dy_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2} x_{1,2} + 0.165y_{1,2}, \\
 \frac{dz_{1,2}}{dt} &= 0.2 + z_{1,2} (x_{1,2} - 10).
 \end{aligned}
 \tag{2-14}$$

ここで、 $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  及び  $\mathbf{X}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  は二つの部分系の各々の力学変数の組、 $C$  は結合係数、 $\omega_{1,2} = 0.97 \pm \Delta\omega$  は各部分系の振動周波数を表す係数で、 $\Delta\omega$  は二つの周波数の間

のデチューニングを表す．完全同期は等価な部分系どうしで起こるため，デチューニングを零 ( $\Delta\omega = 0$ ) とする．横軸に  $x_1(t)$ ，縦軸に  $x_2(t)$  をプロットしてリサージュ図を描くと，二つの部分系の間同期が起こっているかを判別できる．図 2・12(A) に示すように，結合強度が  $C = 0.05$  のとき，軌道は対角線 ( $x_1(t) = x_2(t)$ ) から逸脱し，これは同期が起こっていないことを表している．一方，図 2・12(B) で結合強度が  $C = 0.2$  のときは，軌道は対角線上に乗り，これは完全同期を示している．同期状態においても，各部分系のカオスの性質は保たれているため，軌道点是对角線上に連続的に稠密に分布する．

カオスの完全同期は，結合系のダイナミクスが，同期多様体と呼ばれる部分空間 ( $x_1(t) = x_2(t)$ ， $y_1(t) = y_2(t)$ ， $z_1(t) = z_2(t)$ ) に拘束された状態と考えることができる．このとき，完全同期の局所安定性は，部分空間に拘束されたカオスダイナミクスの補空間方向への安定性で決まる．補空間方向への摂動に対する偏差軌道の時間拡大率を測る横断リアプノフ指数（あるいは，横断拡大率，安定性パラメータとも呼ばれる）を計算し，すべての指数が負であることが同期の条件となる．ただし，同期多様体上のカオスの有する正のリアプノフ指数はそのまま正の値に保たれる．

完全同期はカオス振動子における同期現象の基本であるが，二つの部分系が等価であるという枠組みは実システムに対してはやや厳しい仮定であり，非一様性の存在する自然現象を扱うにはあまり適さない．これに対して，カオスの位相同期<sup>6)</sup>は，部分系どうしの性質が互いに異なる場合にも見られる同期現象である．位相同期を定義するためには，まず，カオス力学系に位相の概念を導入する必要がある．位相を簡単に定義できるリミットサイクル振動子と違い，カオス力学系に対して一意に位相を定める方法は，これまでのところ存在しない．ただし，一意性にとらわれなければ，経験的にカオス力学系に位相を導入することは可能である．例えば， $d$  次元の時間連続な力学系が存在し，カオスダイナミクスを生成しているとする．このような力学系をある二次元平面  $(x, y)$  へ射影したとき，ダイナミクスが二次元平面上で，原点  $(0, 0)$  を中心に回転するような理想的な状況を考える（図 2・13(A) 参照）．このとき，平面  $(x, y)$  上の原点を中心とする回転角を利用して，位相を  $\phi(t) = \arctan(\frac{y}{x})$  と定義することができる（これ以外に，ヒルベルト変換を用いて位相を定義する方法などもある<sup>6)</sup>）．このようにカオスの位相を定義したとき，二つの部分系の位相同期条件は， $|n\phi_1(t) - m\phi_2(t)| < \text{const}$  と与えられる．ただし， $\phi_1, \phi_2$  は二つの部分系の位相， $n, m$  は自然数， $\text{const}$  は定数とする．

式 (2・14) の結合レスラー方程式を用いて，位相同期の例を見てみる．ここでは，二つのレスラー振動子の周波数の間にデチューニングが存在する場合を考え， $\Delta\omega = 0.02$  と設定する．まず，単一のレスラー方程式は原点  $(0, 0)$  を中心に  $(x, y)$  平面を反時計回りに回転する性質をもつことに着目して，位相  $\phi(t)$  を定義する．このとき，位相同期条件は二つの部分系の  $n$  対  $m$  の位相差  $\Delta\phi_{(n,m)}(t) = n\phi_1(t) - m\phi_2(t)$  を計算することにより判定できる．簡単のため，1 対 1 の位相同期に着目し，位相差  $\Delta\phi_{(1,1)}$  の 1 対 1 のインデックスは省略することにする．結合係数を  $C = 0.03, 0.035$ ，及び  $0.04$  の 3 通りの値に設定して，位相差  $\Delta\phi(t)$  の時間変化を計算した結果を図 2・13(B) に示す．結合係数が小さい場合 ( $C = 0.03$ )，位相差は時間発展と共に拡大してゆくことが見てとれる．これは位相同期の条件を満たさない．これに対して，結合係数が大きくなると，長時間にわたって位相差は一定値を保つようになり ( $C = 0.035$ )，間欠的に位相が  $2\pi$  変化する位相スリップが生ずるようになる． $C = 0.04$  では，位相差が 0 の周辺で揺らぎ，それ以上は成長しなくなり，これは 1 対 1 の位相同期が起こったことを示して

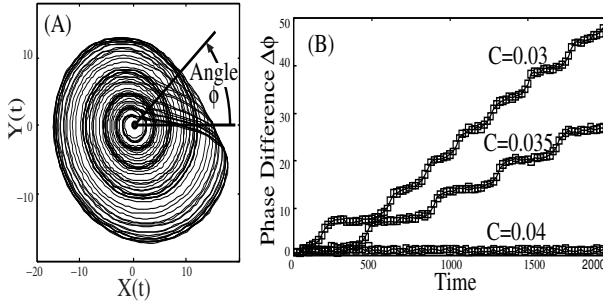


図 2-13 (A) 単一のレーザー方程式から生成されるカオスの  $(x, y)$  座標への射影．原点を中心とする回転角  $\phi$  を用いることにより，位相を定義する．(B) 結合レーザー方程式 (2-14) の二つの部分系の位相差  $\Delta\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$  の時間変化．結合係数は  $C = 0.03, 0.035$ , 及び  $0.04$  に設定．

いる．位相同期におけるリヤプノフ指数の特徴は，二つの部分系のカオスの振幅が独立に保たれるため，正のリヤプノフ指数が二組存在する点である．また，結合のない状態では二組存在していた 0 リヤプノフ指数（位相の時間発展に対応）が，位相同期への遷移に伴い，そのうちの一方が負に転ずる特徴がある．これは，独立であった位相の時間発展に引込みが起こり，一方の独立性が失われたために起こる．

以上，二つのカオス振動子が結合したモデルを用いて完全同期及び位相同期について紹介した．これ以外にも，カオス振動子の間に，1 対 1 の単射関数  $H$  を通じて， $\mathbf{X}_1(t) = H(\mathbf{X}_2(t))$  の関係が生ずる一般化同期<sup>4, 5)</sup>や，時間遅れ  $\tau$  を介して  $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t + \tau)$  の関係が生ずる遅延同期<sup>7)</sup>などがある．更に，より多数のカオス振動子が結合した場合においても同様の同期現象がみられ，結合様式（大域結合，局所結合）に依存して，クラスター生成やパターン形成などの多様な現象が観測できる．詳細については他の専門書（例えば文献 8）を参照されたい．

## 2-4-2 カオス制御

（執筆者：小西啓治）[2009 年 3 月受領]

カオス現象の理解は 1980 年代に大きく進展し，様々な研究分野に影響を与えてきた．1990 年代に入り，カオスの応用に関する二つの研究が注目を集めた．一つは，カオス秘匿通信であり，他方は，カオスの制御である．メリーランド大の Ott, Grebogi, Yorke らは，システムパラメータのわずかな摂動だけでカオスが制御できることを示した<sup>9)</sup>．この手法は OGY 法と呼ばれている．一方，Pyragas は，制御則に遅延時間を利用した遅延フィードバック制御 (DFC) 法を提案している<sup>10)</sup>．これらの制御法は，非線形科学分野に非常に大きなインパクトを与えている<sup>11, 12, 13, 14, 15, 16)</sup>．

今，非線形システム  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  において，制御入力がない状態  $u(t) \equiv \mathbf{0}$  でカオスが発生していると仮定しよう．多数の不安定周期解  $\bar{x}(t) = \bar{x}(t + T)$  がカオスアトラクタには内在している．カオスの制御とは，適切な  $u(t)$  を非線形システムに入力し，カオス的な軌道  $x(t)$  を不安定周期解  $\bar{x}(t)$  に収束させることである．

OGY 法は，ポアンカレ断面上での離散時間システム  $x_d(n+1) = f_d(x_d(n), u_d(n))$  を制御対

象としている．この手法は，ポアンカレ断面上の不安定周期解  $\bar{x}_d$  をあらかじめ算出し，制御則  $u_d(n) = K(x_d(n) - \bar{x}_d)$  で制御入力を決めている（図 2・14(a) 参照）．適切なフィードバックゲイン  $K$  を設定すれば，軌道は不安定周期解に安定化する ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_d(n) = \bar{x}_d$ )．この手法は不安定周期解近傍における状態フィードバック制御と等価であるため，制御系の設計には，システム制御分野の知見をそのまま利用することができる．

一方，DFC 法の制御則は  $u(t) = K(x(t) - x(t-T))$  であり，OGY 法で使用していた不安定周期解の位置情報を，周期  $T$  だけ遅延させた状態  $x(t-T)$  に置き換えている（図 2・14(b) 参照）．DFC 法は，位置情報を事前に算出する必要がないため，OGY 法よりも手軽に利用できる．しかしながら，制御システムに遅延時間が含まれていることで，制御系の設計は難しくなる．また，DFC 法には，ある種の周期解や平衡点が安定化できないという問題点もある．これらの課題は現在も精力的に調査されている<sup>14, 15)</sup>．

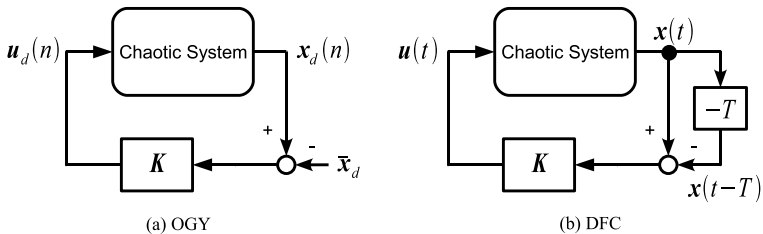


図 2・14 カオスシステムの制御手法

上記で紹介した二つの手法には，カオス軌道が不安定周期解の近傍を訪れたときにのみ制御入力を印加する仕掛けが必要である<sup>9, 10)</sup>．もし，この仕掛けがなければ，制御入力が大きくなり，解が発散したり，内在する周期解とは異なる新たな解が発生するかもしれない．一方，カオスの制御は，理論的なアプローチだけでなく，回路系・機械系・レーザ系・生体系などの実システムにも適用されている<sup>11, 13)</sup>．更に，高次元のカオスシステムや時空カオスシステムへの拡張も行われている<sup>11, 12, 13, 14, 15)</sup>．

### 2-4-3 カオス通信・符号化

（執筆中）

### 2-4-4 カオス暗号

（執筆中）

### 2-4-5 カオス乱数

（執筆中）

### 2-4-6 セルラーニューラルネットワーク

（執筆者：高橋規一）[2009年8月受領]

セルラーニューラルネットワーク（Cellular Neural Network: CNN）は相互結合型ニューラルネットワークとセルオートマトンの性質を併せもつ非線形回路網である．カリフォルニ

ア大学パークレー校の Chua と Yang によって 1988 年に提案された<sup>17)</sup>。主な応用は信号処理であり、特に、アナログ回路の高速性を活かした実時間画像処理に関する研究が盛んに行われている。また、収束性やパターン形成などの非線形ダイナミクス、テンプレートの自動設計、集積回路化などについても精力的に研究が続けられている。

(1) 回路構造と状態方程式

セルと呼ばれる基本回路が  $M$  行  $N$  列の二次元格子状に配置され、近傍のセルどうしが電圧制御電流源によって結合しあひ一つの回路網を形成している (図 2・15)。第  $i$  行、第  $j$  列に配置されたセル  $C(i, j)$  において、キャパシタ電圧に関する回路方程式を立てて適当な正規化を行うと、次の状態方程式が導出される。

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = -x_{ij} + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} A(i, j; k, l) y_{kl} + \sum_{C(k,l) \in N_r(i,j)} B(i, j; k, l) u_{kl} + z_{ij}$$

ここで  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$ ,  $u_{ij}$  はそれぞれ  $C(i, j)$  の状態、出力、入力を表し、状態と出力の間には非線形の関係式  $y_{ij} = f(x_{ij}) = (|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|)/2$  が成り立つ。また、 $A(i, j; k, l)$ ,  $B(i, j; k, l)$  は  $C(k, l)$  から  $C(i, j)$  への結合の強さを表す定数であり、 $z_{ij}$  は  $C(i, j)$  のバイアスを表す定数である。 $N_r(i, j)$  は  $C(i, j)$  の近傍を表し、 $N_r(i, j) = \{C(k, l) : |k - i| \leq r, |l - j| \leq r\}$  で定義される。すべてのセルに対して  $N_r(i, j)$  が意味をもつようにするため、 $M \times N$  個のセルの外側にセルが追加配置され、これらのセルには、ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件、周期境界条件のいずれかが仮定される。

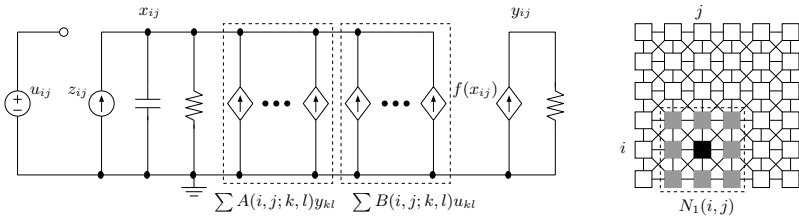


図 2・15 CNN の回路構造 (左: セル回路, 右: セルの配置と近傍)

回路パラメータ  $A(i, j; k, l)$ ,  $B(i, j; k, l)$ ,  $z_{ij}$  の値がセルの位置  $(i, j)$  に依存しないとき、CNN は空間不変であるという。このとき、 $A(i, j; k, l)$ ,  $B(i, j; k, l)$  はそれぞれ  $(2r + 1)^2$  個のパラメータで表現される。 $A(i, j; k, l)$ ,  $B(i, j; k, l)$  に関するパラメータを行列表現したものをフィードバックテンプレート、フィードフォワードテンプレートという。これらに  $z_{ij}$  を加えた  $2 \times (2r + 1)^2 + 1$  個のパラメータをまとめてテンプレートと呼ぶこともある。

(2) 非線形ダイナミクス

CNN の挙動は、回路パラメータ  $A(i, j; k, l)$ ,  $B(i, j; k, l)$ ,  $z_{ij}$ 、入力  $u_{ij}$ 、境界条件、初期状態  $x_{ij}(0)$  によって決まる。入力  $u_{ij}$  が時間によらず一定であるならば、状態ベクトル  $x(t) \in R^{M \times N}$  は状態方程式に従って有界領域内を連続的に変化し (状態方程式の右辺第 1 項と非線形関数



$f$  の飽和特性から状態ベクトルの有界性が容易に示される), 平衡点, リミットサイクル, カオス軌道などに収束する<sup>18)</sup>.

入力  $u_{ij}$  が時間によらず一定で, 任意の初期状態に対して状態ベクトル  $x(t)$  がいずれかの平衡点に収束するとき, CNN は完全安定であるという. 画像処理への応用では,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  を出力画像とみなすことが多いので, 完全安定性は理論と応用の両面で重要な性質である. 完全安定であるための回路パラメータに関する条件として,  $A(i, j; k, l)$  の対称性やフィードバックテンプレートの positive cell-linking 性などが知られている<sup>18)</sup> が, CNN の応用範囲を広げるためにはより緩い条件の導出が望まれる.

### (3) 画像処理とテンプレート設計

空間不変 CNN において, テンプレートを適切に設定することにより, 様々な画像処理を実現できる. 例として, ハーフトーン処理 (グレースケール画像を黒と白の 2 色だけで表現すること) の結果を図 2・16 に示す. このほかの例については, 文献 19) に詳しく記載されている. 所望の画像処理を実現するテンプレートを求めることは一般に非常に難しい問題である. 主なアプローチとして, 直観的方法, 学習アルゴリズムを用いる方法, 解析的方法などがあるが, どれも一長一短あり, 決定的なものは存在しない.



図 2・16 CNN によるハーフトーン処理 (左: 原画像, 右: CNN の出力)

### (4) モデルの拡張

Chua と Yang のモデルの信号処理能力を拡大するため, 離散時間 CNN, 非線形テンプレート, 遅延テンプレート, 多層 CNN, CNN ユニバーサルマシン, 反応拡散 CNN など, これまでに様々な拡張が提案されている. 中でも, CNN ユニバーサルマシンは, 空間不変 CNN の非線形ダイナミクスを利用したアナログ演算と論理演算を組み合わせる点に大きな特徴がある. スタッドプログラム方式の計算機であるため, 処理の流れをプログラムしておけば, 複雑な処理を容易に実行できる.

#### 2-4-7 カオスニューラルネットワーク

(執筆: 堀尾喜彦) [2009 年 3 月受領]

ニューロンがカオス的応答を示すことが, ヤリイカの巨大軸索の神経膜を用いた電気生理実験と, ホジキン・ハクスレイ方程式の数値解析により明らかにされた<sup>20)</sup>. 合原らは, これらの複雑なニューロンの非線形応答が, 定性的には簡単な離散時間力学系モデルで記述でき

ることを示し、これをカオスニューロンモデルと命名した<sup>21, 22, 23)</sup>。

$p$  個のニューロンから構成されたカオスニューラルネットワーク中の  $i$  番目 ( $1 \leq i \leq p$ ) のカオスニューロンのダイナミクスは次式で記述される。このモデルでは、ニューロンは三つの内部状態をもち、それらは、ニューロンどうしの結合の影響、外部入力の影響、自己帰還の影響に、それぞれ対応している<sup>21, 22, 23, 24)</sup>。

$$x_i(t_{n+1}) = f_i \left( \sum_{j=1}^p w_{ij} \sum_{d=0}^n k_f^d h_{ij}(x_j(t_{n-d})) + \sum_{j=1}^m v_{ij} \sum_{d=0}^n k_e^d a_j(t_{n-d}) - \alpha \sum_{d=0}^n k_r^d g_i(x_i(t_{n-d})) + \Theta_i \right) \quad (2 \cdot 15)$$

ここで、 $x_i(t_n)$  は離散時間  $t_n$  ( $n$  は正の整数) におけるニューロンの出力、 $w_{ij}$  はニューロン  $j$  からニューロン  $i$  への結合の強さ、 $v_{ij}$  はニューロン  $i$  へ入力される  $j$  番目の外部入力線維とのシナプス結合の強さ、 $a_j(t_{n-d})$  は時刻  $t_{n-d}$  における  $j$  番目の外部入力の大きさ、 $m$  は  $i$  番目のニューロンに入力される外部入力の総数である。更に、 $\Theta_i$  は外部バイアス、 $k_f, k_e, k_r$  は、それぞれ、ほかのニューロンからのフィードバック入力、外部入力、及び、不応性の減衰定数である。また、 $f_i(\cdot)$  は連続で単調増加なニューロンの出力関数、 $g_i(\cdot)$  は出力の大きさと不応性の大きさととの関係を表す不応性関数、 $h_{ij}(\cdot)$  は軸索の波形整形作用を表す関数である。

カオスニューロンモデルの最大の特徴は、 $k_r$  及び  $\alpha$  でモデル化された相対不応性もしくは自己抑制結合である。この不応性と滑らかな出力関数  $f_i(\cdot)$  とにより、現実のニューロンが呈するようなカオスを含む多様な応答が再現できる。また、カオスニューロンモデルのパラメータを適当に変更することにより、このモデルで既存の離散時間ニューロンモデルの主なものをすべて再現することが可能である。例えば、 $f_i(\cdot)$  としてステップ関数を用いた場合、 $k_f = k_e = k_r = \alpha = 0$  とすればマカロック・ピッツモデルと、 $k_r \neq 0, \alpha \neq 0$  とすれば悪魔の階段モデルとそれぞれ等価になる。一方、 $f_i(\cdot)$  を連続関数のままとし、 $k_f = k_e = k_r = \alpha = 0$  とすれば、アナログニューロンモデルと等価になる。このように、カオスニューロンモデルは、既存の離散時間ニューロンモデルに新たにカオスダイナミクスを付加したものであると考えられる。したがって、カオスニューロンの振る舞いを既存のニューロンモデルのそれと比較しながら調べることにより、カオスが情報処理に果たす役割を検証できる<sup>23)</sup>。

式 (2・15) 中の  $f_i(\cdot)$  のカッコ内の第 1 項を  $\eta_i(t_{n+1})$ 、第 2 項を  $\xi_i(t_{n+1})$ 、第 3 項と第 4 項の合計を  $\zeta_i(t_{n+1})$  と置くと、モデル式は以下のような漸化式で表せる<sup>21, 22, 23, 24)</sup>。

$$\eta_i(t_{n+1}) = k_f \eta_i(t_n) + \sum_{j=1}^p w_{ij} h_{ij}(x_j(t_n)) \quad (2 \cdot 16)$$

$$\xi_i(t_{n+1}) = k_e \xi_i(t_n) + \sum_{j=1}^m v_{ij} a_j(t_n) \quad (2 \cdot 17)$$

$$\zeta_i(t_{n+1}) = k_r \zeta_i(t_n) - \alpha g_i(x_i(t_n)) + \theta_i \quad (2 \cdot 18)$$

ここで、 $\theta_i \equiv \Theta_i(1 - k_r)$  であり、また、

$$x_i(t_{n+1}) = f_i(\eta_i(t_{n+1}) + \xi_i(t_{n+1}) + \zeta_i(t_{n+1})) = f_i(y_i(t_{n+1})) \quad (2 \cdot 19)$$

である。ここで、 $y_i(t_{n+1})$  は全内部状態である。モデル式がこのような簡単な差分方程式の組

に帰着できることは、モデルの振る舞いを詳しく調べたり、大規模なネットワークをソフトウェアやハードウェアにより構成する場合に大変重要な点である<sup>25, 26, 27</sup>。

更に、式 (2・15) で  $k_f = k_c = k_r \equiv k$  である場合の単体のカオスニューロンの振る舞いは、次の簡単な一次元写像 (カオスニューロンマップ) で記述できる<sup>21, 22</sup>。

$$y(t_{n+1}) = ky(t_n) - \alpha g(f(y(t_n))) + A(t_n) \quad (2 \cdot 20)$$

ここで、 $A(t_n) = a(t_n) - ka(t_{n-1}) + \theta(1 - k)$  である。

カオスニューラルネットワークモデルの時空間カオスダイナミクスは、シナプス結合を介したニューロン相互の影響とニューロン自身もつ不応性の影響とからなる、階層的なフィードバックにより自己組織的に生成される。したがって、ネットワーク全体としての時空間ダイナミクスが個々のニューロンのダイナミクスに影響を与えると同時に、個々のニューロンの振る舞いがネットワーク全体の挙動に影響することにより、複雑な時空間カオスダイナミクスが生まれる。例えば、連想記憶ネットワークのように結合係数  $w_{ij}$  を設定すると、ニューロン間の結合の影響によりネットワークの状態は安定化される。しかし、同時にニューロンが持つ不応性の影響でネットワークの状態が不安定化される。このような安定化と不安定化の微妙なバランスにより生成される時空間ダイナミクスを用いることにより、ネットワークの状態空間に埋め込まれた平衡点を局所安定状態に捕われることなく効率良く探索するカオスの探索が実現できる<sup>23</sup>。このカオスの探索ダイナミクスは、記憶に相当する多数の平衡点を動的に想起する動的連想記憶<sup>24</sup>)や、モンタージュの作成などに応用されている<sup>28</sup>)。また、このようなカオスニューラルネットワークの複雑な時空間カオスダイナミクスは、カオスの遍歴とも密接な関係があると考えられる<sup>29</sup>)。

更に、カオスの探索ダイナミクスは、組合せ最適化問題の効率的な解の探索などにも応用されており<sup>23</sup>)、巡回セールスマン問題 (TSP) や二次割当て問題 (QAP) などのベンチマーク問題に加え、発電機のメンテナンススケジューリングやインテリア照明の設計、更には、パケットルーティングや DNA のモチーフ解析などの実用問題によりその有効性が示されている<sup>23, 30, 31, 32, 33, 34</sup>)。例えば、TSP や QAP を解く有効な手法として、カオスニューロダイナミクスでヒューリスティカルゴリズムを駆動する方法が提案されている<sup>35, 36, 37, 38</sup>)。一方、Hopfield 型のカオスニューラルネットワークと解構築法を融合して QAP を解く手法も提案され、従来法より解の探索性能が高いことが示されている<sup>39, 40</sup>)。

カオスニューラルネットワークの複雑な時空間ダイナミクスを解析・応用するためには、構成的研究が有用である。更に、カオスニューラルネットワークモデルは、その記述式の簡単さによりハードウェアによる実装に適しているため、カオスのもつ実数の複雑さを自然に実装できるアナログ電子回路を核としたカオスニューロコンピュータの開発や応用の研究も進んでおり<sup>25, 26, 40, 41</sup>)、高次元の物理カオスニューロダイナミクスを活用した、新しい超並列アナログ計算の可能性が模索されている。

#### 参考文献

- 1) K.M. Cuomo and A.V. Oppenheim, "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications," Phys. Rev. Lett., vol.71, no.1, pp.65-68, 1993.
- 2) H. Fujisaka and T. Yamada, "Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems," Prog. Theor. Phys., vol.69, no.1, pp.32-47, 1983.

- 3) L.M. Pecora and T.L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol.64, no.8, pp.821-824, 1990.
- 4) N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, and H.D.I. Abarbanel, "Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems," *Phys. Rev. E*, vol.51, no.2, pp.980-994, 1995.
- 5) L. Kocarev and U. Parlitz, "Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems," *Phys. Rev. Lett.*, vol.76, no.11, pp.1816-1819, 1996.
- 6) M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths, "Phase synchronization of chaotic oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol.76, no.11, pp.1804-1807, 1996.
- 7) M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths, "From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, vol.78, no.22, pp.4193-4196, 1997.
- 8) A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths (著), 徳田功 (訳), "同期理論の基礎と応用," 丸善, 2009.
- 9) E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, "Controlling chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no.11, pp.1196-1199, 1990.
- 10) K. Pyragas, "Continuous control of chaos by self-controlling feedback," *Phys. Lett. A*, vol.170, no.6, pp.421-428, 1992.
- 11) G. Chen and X. Dong, "From chaos to order," World Scientific Pub. Co. Inc., 1998.
- 12) B.R. Andrievskii and A.L. Fradkov, "Control of chaos: methods and applications. I Methods," *Automation and Remote Control*, vol.64, no.5, pp.673-713, 2003.
- 13) B.R. Andrievskii and A.L. Fradkov, "Control of chaos: methods and applications. I Applications," *Automation and Remote Control*, vol.65, no.4, pp.505-533, 2004.
- 14) K. Pyragas, "Delayed feedback control of chaos," *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol.364, no.1846, pp.2309-2334, 2006.
- 15) E. Schöll and H.G. Schuster, "Handbook of chaos control," Wiley-Vch, 2007.
- 16) 潮 俊光, "カオス制御," 朝倉書店, 1996.
- 17) L.O. Chua and L. Yang, "Cellular neural networks: theory and applications," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.35, no.10, pp.1257-1290, 1988.
- 18) L.O. Chua, "CNN: a paradigm for complexity," World Scientific, Singapore, 1998.
- 19) L. Kék, K. Karacs and T. Roska, "Cellular wave computing library: templates, algorithms, and programs version 2.1 edition," MTASZTAKI, Budapest, 2007.
- 20) K. Aihara and G. Matsumoto, "Chaotic oscillations and bifurcations in squid giant axons," *Chaos* (A. V. Holden ed.), Manchester University Press and Princeton University Press, pp.257-269, 1986.
- 21) K. Aihara, "Chaotic neural networks," *Bifurcation Phenomena in Nonlinear System and Theory of Dynamical Systems* (H. Kawakami ed.), World Scientific, pp.143-161, 1990.
- 22) K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda, "Chaotic neural networks," *Phys. Lett. A*, vol.144, pp.333-340, 1990.
- 23) K. Aihara, "Chaos engineering and its application to parallel distributed processing with chaotic neural networks," *Proc. IEEE*, vol.90, no.5, pp.919-930, 2002.
- 24) M. Adachi and K. Aihara, "Associative dynamics in a chaotic neural network," *Neural Networks*, vol.10, no.1, pp.83-98, 1997.
- 25) Y. Horio and K. Aihara, "Chaotic neuro-computer," *Chaos in Circuits and Systems* (G. Chen and T. Ueta eds.), World Scientific Publishers, pp.237-255, 2002.
- 26) Y. Horio and K. Aihara, "Neuron-synapse IC chip-set for large-scale chaotic neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol.14, no.5, pp.1393-1404, 2003.
- 27) R. Herrera, K. Suyama, Y. Horio and K. Aihara, "IC implementation of a switched-current chaotic neuron," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E82-A, no.9, pp.1776-1781, 1999.
- 28) J. Kuroiwa, N. Masutani, S. Nara, and K. Aihara, "Sensitive response of a chaotic wandering state to

- memory fragment inputs in a chaotic neural network model,” *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol.14, no.4, pp.1413-1421, 2004.
- 29) K. Kaneko and I. Tsuda, “Chaotic Itinerancy,” *Chaos*, vol.13, no.3, pp.926-936, 2003.
  - 30) L. Chen and K. Aihara, “Chaotic simulated annealing by a neural network model with transient chaos,” *Neural Networks*, vol.8, no.6, pp.915-930, 1995.
  - 31) I. Tokuda, K. Aihara, and T. Nagashima, “Adaptive annealing for chaotic optimization,” *Phys. Rev. E*, vol.58, no.4, pp.5157-5160, 1998.
  - 32) R. Nanba, M. Hasegawa, T. Nisita, and K. Aihara, “Optimization using chaotic neural networks and its application to lighting design,” *Control and Cybernetics*, vol.31, no.2, pp.249-269, 2002.
  - 33) T. Kimura, and T. Ikeguchi, “A new algorithm for packet routing problems using chaotic neurodynamics and its surrogate analysis,” *Neural Computing and Applications*, vol.16, pp.519-526, 2007.
  - 34) T. Matsuura and T. Ikeguchi, “Refractory effects of chaotic neurodynamics for finding motifs from DNA sequences,” *Proc. of Int. Conf. Intelligent Data Engineering and Automated Learning*, pp.1103-1110, 2006.
  - 35) M. Hasegawa, T. Ikeguchi, and K. Aihara, “Combination of chaotic neurodynamics with the 2-opt algorithm to solve traveling salesman problems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol.79, no.12, pp.2344-2347, 1997.
  - 36) M. Hasegawa, T. Ikeguchi, and K. Aihara, “Exponential and chaotic neurodynamical tabu searches for quadratic assignment problems,” *Control and Cybernetics*, vol.29, no.3, pp.773-788, 2000.
  - 37) M. Hasegawa, T. Ikeguchi, and K. Aihara, “Solving large scale traveling salesman problems by chaotic neurodynamics,” *Neural Networks*, vol.15, no.2, pp.271-283, 2002.
  - 38) M. Hasegawa, T. Ikeguchi, K. Aihara, and K. Itoh, “A novel chaotic search for quadratic assignment problems,” *European J. of Operational Research*, vol.139, pp.543-556, 2002.
  - 39) T. Ikeguchi, K. Sato, M. Hasegawa, and K. Aihara, “Chaotic optimization for quadratic assignment problems,” *Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Syst.*, vol.3, pp.469-472, 2002.
  - 40) Y. Horio, T. Ikeguchi, and K. Aihara, “A mixed analog/digital chaotic neuro-computer system for quadratic assignment problems,” *Neural Networks*, vol.18, no.5-6, pp.505-513, 2005.
  - 41) Y. Horio, and K. Aihara, “Analog computation through high-dimensional physical chaotic neurodynamics,” *Physica-D*, vol.237, no.9, pp.1215-1225, 2008.