

3 章 アドバンスト制御

【本章の構成】

本章では以下について解説する .

- 3-1 非線形制御理論
- 3-2 ロバスト制御理論
- 3-3 適応制御理論
- 3-4 ハイブリッド制御理論
- 3-5 モデル予測制御

1 群 - 6 編 - 3 章

3-1 非線形制御理論

(執筆者: 中村文一, 山下 裕) [2009 年 11 月受領]

実際の制御システムは非線形の微分方程式としてモデル化される非線形システムが多い。広大な非線形制御理論のなかから、本章では漸近安定化制御に絞って解説する。

本章では、特にただし書きのない場合、 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\dot{x} := dx/dt$, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表し、写像は十分な回数だけ微分可能であるものとする。また、 $\mathbb{R}_{\geq 0} := [0, +\infty)$ と定義することとする。

3-1-1 非線形制御理論の制御対象

非線形制御理論では、主に n 次元ユークリッド空間における m 次元の入力付き時不変常微分方程式として記述された、以下の制御系を取り扱う。

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

ただし、 x は状態、 u は制御入力、 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ である。式 (3.1) は状態 x 、入力 u の両方に関して非線形であるが、入力に関する非線形性は取り扱うことが難しい。そのため、非線形制御理論の研究は主として以下の入力アフィン系を対象として進められた。

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u := f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad (3.2)$$

ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, m$) である。

非線形制御理論では、3-1-8 項で紹介するスライディングモード制御のように、不連続な入力も取り扱う。入力 u が不連続な場合には微分方程式の解は古典的な意味では存在しない場合もあり、そのような場合には別途特殊な解を考える必要がある¹⁾ ことには十分注意する。

漸近安定化制御は、主に静的状態フィードバック $u = k(x)$ によって制御系 (3.1) あるいは (3.2) の原点 0 を漸近安定化することを目的とする。漸近安定性の定義を紹介しよう。任意の原点近傍 M において、すべての $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $x(t) \subset W \subset M$ であるような原点近傍 W が存在し、 $x(0) \in W$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ であるとき、式 (3.1) の原点は局所漸近安定であるという。また、任意の $x(0) \in \mathbb{R}^n$ に対して $x(0) \in W$ となるような W が存在するとき、原点は大域的に漸近安定であるという。

3-1-2 線形近似

制御理論は主に線形制御システムを対象として進められた。実際の制御系は非線形システムであることがほとんどであるが、線形近似系に対する線形制御系は局所安定性を保持する。

制御系 (3.1) の原点 0 周りで Taylor 展開して一次の項まで考慮すると次式が得られる。

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=0} x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=0} u := Ax + Bu \quad (3.3)$$

行列対 (A, B) が可制御であれば、システム (3.3) の原点を漸近安定化する定数係数線形状態

フィードバック制御則 $u = -Kx$ が存在する。 K を設計するためには、極配置、LQ 最適制御理論などが利用できる。線形状態フィードバック則により式 (3.3) の原点の漸近安定性が得られたとき、もとの非線形システム (3.1) の原点は局所漸近安定であることが保証される⁶⁾。

非線形制御理論では、主に線形近似では扱うことのできない問題である以下の問題を取り扱う。

1. 大域的な漸近安定化問題
2. 線形近似系が可制御ではない問題

非線形制御理論全般として注意すべき点は、線形近似系に対して線形制御則を使った場合には式 (3.1) の局所安定性が保証できるが、非線形制御則を使った場合には保証できない。このような場合場合、元の非線形システム (3.1) に戻って安定性を検証する必要がある。

3-1-3 数学的基礎事項

(1) 関数の正定性とプロパー性

非線形制御理論では、関数の正定性とプロパー性をよく利用するため、事前に定義しておく。関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、 $V(0) = 0$ かつ任意の $x \neq 0$ に対して $V(x) > 0$ であるとき正定であるという。関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は、任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して集合 $\{x|V(x) \leq \varepsilon\}$ がコンパクトであるときプロパーであるという。関数のプロパー性はユークリッド空間上では「放射状に非有界」であることと同義であり、適当な仮定を置くことにより位相空間上でもプロパー性は定義される。

(2) 比較関数

非線形制御理論では、比較関数と呼ばれる関数がよく利用される。連続な関数 $\gamma: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は、 $\gamma(0) = 0$ かつ狭義単調増加であるときクラス \mathcal{K} 関数と呼ばれる。クラス \mathcal{K} 関数が $\lim_{r \rightarrow +\infty} \gamma(r) = +\infty$ を満足するとき、 γ はクラス \mathcal{K}_{∞} 関数であるという。 r, s の 2 変数を持つ連続関数 $\beta: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ は、 r に関してクラス \mathcal{K} であり、 r を固定したとき $\lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$ であるときクラス \mathcal{KL} 関数であるという。

3-1-4 Lie 微分

常微分方程式系 $\dot{x} = f(x)$ を考える。ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は x に関して連続であるとする。微分方程式系の右辺 $f(x)$ をベクトル場という。微分可能な関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ のベクトル場 f による Lie 微分とは次式によって定義される関数である。

$$L_f V(x) := \frac{\partial V}{\partial x} f(x). \quad (3.4)$$

なお、Lie 微分は座標変換によって不変であるなどの優れた性質を持つが、非線形制御理論ではしばしば表記の簡略化のためのために用いられることに注意する。なお、連続的に Lie 微分を行う際に以下の記法を用いる。

$$L_g L_f V(x) = \frac{\partial(L_f V)}{\partial x} g(x), \quad L_f^k V(x) = L_f L_f^{k-1} V(x), \quad L_f^0 V(x) = V(x) \quad (3.5)$$

3-1-5 Lyapunov 関数と制御 Lyapunov 関数

非線形制御理論では、特殊な例を除いて線形制御系のように解析解を求めたり、固有値解析を行うことができない。そのため、線形制御理論において安定性判別のために重要な役割を果たす Lyapunov 関数は、非線形制御理論ではなお重要な役割を果たす。また、非線形制御理論では漸近安定化制御則設計において制御 Lyapunov 関数 (CLF) と呼ばれる関数がしばしば利用されているため合わせて紹介する。

(1) Lyapunov 関数を用いた安定性の判別法

正定かつ微分可能な関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 、及び、常微分方程式系 $\dot{x} = f(x)$ を考える。ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は x に関して連続であると仮定する。関数 V が任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ において $\dot{V} = \partial V / \partial x \cdot f(x) < 0$ を満たすとき、 V は Lyapunov 関数であると言われる。Lyapunov 関数が存在するとき、以下の定理が成立する。

定理 1 Lyapunov 関数 V が存在するとき、微分方程式系の原点 0 は局所漸近安定である。 V がプロパーであれば原点は大域的に漸近安定である。

なお、 f が不連続な場合には $\partial V / \partial x \cdot f(x) < 0$ では不十分であり、 $\partial V / \partial x \cdot f(x) < -W(x)$ を満たす正定な連続関数 $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する必要がある。この関数対 (V, W) は Lyapunov 対と呼ばれる。

(2) 制御 Lyapunov 関数

制御システム $\dot{x} = f(x, u)$ を考える。正定、プロパーかつ微分可能な関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し、 $\partial V / \partial x \cdot f(x, u) < -W(x)$ を満たすような入力 u と正定な連続関数 W が存在するとき V は制御 Lyapunov 関数 (CLF: Control Lyapunov Function) であるという。原点を漸近安定化する静的連続状態フィードバック制御則 $u = k(x)$ を設計する問題を考える際には、この CLF の条件は $\partial V / \partial x \cdot f(x, u) < 0$ で十分なことに留意する。

更に、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 x が $0 \leq \|x\| \leq \delta$ を満たすならば $\|u\| < \varepsilon$ かつ $\partial V / \partial x \cdot f(x, u) < 0$ である u が存在するような δ が存在するとき、CLF V は小入力特性 (SCP: Small Control Property) を持つという。小入力特性は $\varepsilon - \delta$ 論法で表記されているため少し分かりづらいが、入力をどれだけ小さくしてももかならず安定化可能であるような 0 近傍が存在することを意味している。なお、CLF が SCP を持たない場合には、その CLF を用いて原点で連続な入力は設計できない。

3-1-6 フィードバック線形化

線形可制御なシステムに対しては LQ 最適制御などにより状態フィードバック制御則が設計できるが、一般的に、非線形システムの原点を大域的に安定化するような統一的な制御設計法は存在しない。そのため、座標変換と入力変換により制御対象を線形化する手法が検討された。以下これを紹介する。

(1) 入出力線形化

フィードバック線形化において、実用上最も使いやすいものが入出力線形化である。入出力線形化では以下の制御系を考える。

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \quad (3\cdot6)$$

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して次式が成立すると仮定する .

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1, \quad L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (3 \cdot 7)$$

このとき , $\xi = [h(x), \dots, L_f^{\rho-1} h(x)]^T$, $C_c = [1, 0, \dots, 0]$ とおけば次式が得られる .

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (3 \cdot 8)$$

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) + g_0(\eta, \xi)u \quad (3 \cdot 9)$$

$$y = C_c \xi \quad (3 \cdot 10)$$

ただし , η は $[\xi, \eta]^T$ が x の座標変換になるように選んだ変数とする . 座標変換をうまく選ぶと $g_0 = 0$ とできる場合があり , この場合に出力 $y = 0$ における η のダイナミクス $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ をゼロダイナミクスといい , ゼロダイナミクスが漸近安定であるとき非線形システムは最小位相系であるという . 非線形システムが最小位相系であるとき , ξ に関する線形部分システムに線形フィードバック制御則を利用してシステム全体としての漸近安定性は保証できない . しかしながら , η に関する部分システム (3・9) が 3-1-9 項で紹介する入力状態安定 (ISS) であるときには , 原点は大域的に漸近安定である .

(2) 全状態フィードバック線形化

前項で紹介した入出力線形化は出力を微分していくことで線形化する手法であり非常に分かりやすい . しかしながら , ゼロダイナミクスの問題が発生するため面倒なこともある . ゼロダイナミクス問題が発生しない線形化法として全状態フィードバック線形化が知られている .

全状態フィードバック線形化問題では , 以下の制御系を考える .

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3 \cdot 11)$$

全状態フィードバック線形化可能であるための条件は , 写像 $\lambda(x) = [\lambda_1^T(x), \dots, \lambda_m^T(x)]^T$ が存在し , 次式で定義される写像 $M(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して正則になることである . 詳細は⁴⁾を参考にいただきたい .

$$M(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} \lambda_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x) & \cdots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} \lambda_m(x) \end{bmatrix} \quad (3 \cdot 12)$$

ただし , 任意の $i \in [1, m]$ に対して $\lambda_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{r_i}$ であり , $r_1 + \dots + r_m = n$ を満たすものとする .

ここで , 以下の条件を満たす座標変換 $\xi = \phi_c^T(x) = [\phi_{c_1}^T(x), \dots, \phi_{c_m}^T(x)]$, 座標変換 $u = \alpha_c(x) + \beta_c(x)u_c$ を考える .

$$\alpha_c(x) = -M^{-1}(x)[L_f^{r_1} \lambda_1(x), \dots, L_f^{r_m} \lambda_m(x)]^T, \quad \beta_c(x) = M^{-1}(x) \quad (3 \cdot 13)$$

$$\phi_{c_i}^T(x) = [\lambda_i(x), L_f \lambda_i(x), \dots, L_f^{r_i-1} \lambda_i(x)] \quad (3 \cdot 14)$$

このとき、システムは次式の線形システムに変換される

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c \quad (3 \cdot 15)$$

全状態フィードバック線形化に関しては様々な研究が行われているが、 ϕ_c は考える問題に応じて探す必要がある。更に、行列対 (A_c, B_c) は非線形システムの線形近似系における行列対 (A, B) とは異なる。

(A_c, B_c) を (A, B) にあわせるためにロバストフィードバック線形化が知られている。全状態フィードバック線形化が可能なシステムに対して、写像 $\alpha(x) = \alpha_c(x) + \beta_c(x) L T^{-1} \phi_c(x)$, $\beta(x) = \beta_c(x) R^{-1}$, $\phi(x) = T^{-1} \phi_c(x)$, $L = -M(0)(\partial \alpha_c / \partial x|_{x=0})$, $T = \partial \phi_c(x) / \partial x|_{x=0}$, $R = M^{-1}(0)$ を用いた座標変換 $u(x, v) = \alpha(x) + \beta(x)v$ と入力変換 $z = \phi(x)$ を行うことにより以下の線形システムが得られる。

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (3 \cdot 16)$$

(3) フィードバック線形化を利用した状態フィードバック制御系設計

入出力線形化、全状態フィードバック線形化を行ったシステムに対し、線形状態フィードバック制御則 $u_c = -Kx$ を利用すれば原点は大域的に漸近安定である。しかしながら、フィードバック線形化は非線形項を入力によってキャンセルするため問題が生じる可能性がある。これらの場合、線形システムに対する Lyapunov 関数に対して座標変換を逆に施せば元の非線形システムに対する CLF となることを利用し、3-10-3 項で紹介する CLF を利用した制御則を設計することが望ましい。

3-1-7 バックステッピング

フィードバック線形化は非線形システムに対する強力な制御系設計法であるが、利用できない場合もある。このような場合に対する有効な方法の一つとしてバックステッピング法が知られている⁶⁾。

バックステッピング法では以下の厳密フィードバックシステムと呼ばれるシステムを制御対象として考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, x_n)u \end{aligned} \quad (3 \cdot 17)$$

バックステッピング法は 1 段ずつ仮想入力を設計していくことにより最終的に u を設計する手法である。まず、仮想的に入力を x_2 とする CLF として $V_1 = x_1^2$ と選ぶ。次に、 $L_{f_1}V + L_{g_1}V\phi_1(x_1) < 0$ となる ϕ_1 を設計する。ここで、新しい変数として $\xi_2 = x_2 - \phi_1(x_1)$ とする。次に、 x_3 を仮想入力とする CLF として $V_2 = V_1 + \xi_2^2$ と選ぶ。同様に、 ϕ_2, ξ_2, \dots を選んでいくと、最終的に入力 u を設計することができる。バックステッピング法では直接的に

漸近安定化制御則を設計することもできるが、より強力な利用法は制御 Lyapunov 関数の設計法として利用することであろう。

3-1-8 スライディングモード制御

スライディングモード制御は、安定超平面へ有限時間で静定させることにより制御を行う手法である⁶⁾。

(1) 安定超平面

非線形制御系 $\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u$ 、及び⁸⁾、常に $L_s s(x) \neq 0$ である微分可能な関数 $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 x が常に $s(x) = 0$ を満たすならば $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ を保証できるとき、 $s(x)$ は安定超平面であるという。

(2) スライディングモード制御

スライディングモード制御は、基本的に状態量 x を有限時間で安定超平面に収束させる制御である。制御の実現法は様々なものがあるが、最もよく知られるものは $m = 1$ である 1 入力システム $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ に対する以下の制御則である。

$$u = -\frac{L_f s(x)}{L_g s(x)} - \text{sgn}(s(x)) \cdot L_g s(x) \quad (3 \cdot 18)$$

ただし、 $\text{sgn}(\cdot)$ は次式のように定義される符号関数である。

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (3 \cdot 19)$$

制御則 (3・18) により、状態 x は有限時間で超平面 $s(x) = 0$ に到達し、その結果としてシステムの漸近安定性が保証される。

3-1-9 入力状態安定性

これまでの議論では、外乱のない制御系を考えた。外乱除去は制御理論において重要な問題であり、非線形制御理論でも多数の研究が行われた。そのなかでも汎用的かつ整理された体系が得られている入力状態安定性 (ISS) について説明する⁵⁾⁹⁾。

外乱を d とする常微分方程式系 $\dot{x} = f(x, d)$ を考える。任意の初期値 $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ と有界な外乱 $d(t)$ に対し、任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ において次式を満たすようなクラス \mathcal{KL} 関数 β とクラス \mathcal{K} 関数 γ が存在するとき、システムは ISS (Input-to-State Stable) であるという。

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma\left(\sup_{\tau \in [0, t]} \|d(\tau)\|\right) \quad (3 \cdot 20)$$

ISS は初期状態を考慮に入れた有界状態有界入力安定である。ISS は非常に便利な概念であり、例えば 3-1-6 項で紹介した入出力安定化を行った際の η に関する部分システムが ISS であれば、システム全体の漸近安定性が保証できる。

ISS を利用する際にも Lyapunov 関数はよく用いられる。任意の x, u に対して $\underline{\alpha}(\|x\|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(\|x\|)$ を満たすようなクラス \mathcal{K}_∞ 関数 $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ と、 x が $\|x\| \geq \chi(\|u\|)$ であるならば

$L_{f(x,d)}V \leq -\mu(\|x\|)$ が成立する \mathcal{K} 関数 χ, μ が存在するとき, 関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $\dot{x} = f(x, d)$ に対する ISS Lyapunov 関数という. システムが ISS であることと, ISS Lyapunov 関数が存在することは等価であることが知られている.

なお, 線形システムに対する H_∞ 制御に対応する, 非線形システムに対する外乱抑制制御として ISS と CLF を利用したものがよく用いられる³⁾.

3-1-10 制御 Lyapunov 関数を用いた状態フィードバック制御則設計

非線形制御系に対して CLF が得られている場合には簡単に漸近安定化制御則が設計できる.

関数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ をシステム $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ に対する制御 Lyapunov 関数とする. このとき, 以下の制御則は原点を大域的に漸近安定化する⁷⁾⁹⁾.

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{L_f V(x) + \sqrt{L_f V^2(x) + \|L_g V(x)\|^4}}{\|L_g V(x)\|^2} \cdot L_g V^T(x) & (L_g V(x) \neq 0) \\ 0 & (L_g V(x) = 0) \end{cases} \quad (3 \cdot 21)$$

制御則 (3・21) は, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上で連続, かつ, $V(x)$ が小入力特性を満たすならば原点でも連続である.

更に, 制御則 (3・21) は, ゲイン余裕 $[1/2, \infty)$ を保証する. すなわち, $g(x)$ が $\kappa g(x)$ に変化しても, $\kappa \in [1/2, \infty)$ であればシステムの漸近安定性は保持される. フィードバック線形化したシステムを線形制御則によって安定化すると, 例え線形制御則に LQ 最適制御を使ってもゲイン余裕は保証できないため, 入力部のパラメータ誤差があるようなシステムに対してはフィードバック線形化は CLF 設計法として利用し, 制御則は式 (3・21) を使用することが望ましい.

3-1-11 難しい問題

さて, ここまでに述べた内容は, 比較的線形に近い問題である. これは, 非線形制御理論では未解決問題が山積みしていることに起因する. 例えば, 線形制御理論で重要な役割を果たすオブザーバは非線形システムに対して統一的に設計する方法は得られていない. フィードバック線形化に類似した手法もオブザーバ設計に対しては非常に限定された場合にしか適用できない.

更に, 非線形制御系 (3・1) が与えられたときに, 原点が安定化可能であるかも完全にはわかっていない. 非ホロノミックシステムに代表される, 非線形システムとしては可制御であるが線形近似系は可制御ではないというようなシステムの漸近安定化問題は非常に難しい. また, ユークリッド空間とは位相幾何学的に異なる空間における漸近安定化制御問題も同様に難しい問題として残されている.

参考文献

- 1) J. Cortes: "Discontinuous dynamical systems," IEEE Control Systems Magazine, vol.28, no.3, pp.36-73, 2008.
- 2) R.A. Freeman and P.V. Kokotović: "Robust and Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques," Birkhäuser, Boston, 2008.

- 3) W.M. Haddad and W. Chellaboina : “Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-based Approach,” Princeton University Press, 2008.
- 4) A. Isidori : “Nonlinear Systems,” Springer, 1995.
- 5) A. Isidori : “Nonlinear Systems II,” Springer, 1999.
- 6) H.K. Khalil : “Nonlinear Systems,” Prentice Hall, 2002.
- 7) R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotović : “Constructive Nonlinear Control,” Springer, 1997.
- 8) 石島 他 : “非線形システム論,” コロナ社, 1993.
- 9) E.D. Sontag : “Mathematical Control Theory,” Springer, 1998.

1 群 - 6 編 - 3 章

3-2 ロバスト制御理論

(執筆者：浅井 徹)[2008 年 10 月受領]

3-2-1 ロバスト制御の背景と目的

制御系を設計する際には、閉ループ系が安定であることだけでなく、目標値への追従や外乱の除去などに関して、可能な限り高い性能を達成することが要求される。しかし、一般に安定性と性能はトレードオフの関係にあり、無限に高い性能を達成することはできない。そこで、閉ループ系の安定性を確保しつつ、如何にして高い性能を達成するかが制御系設計の大きな課題である。

制御系設計に限らず、一般に設計プロセスには多数の要因が相互に複雑に絡むために、様々なレベルでの試行錯誤が要求される。制御系設計では、多くの場合、閉ループ系の応答を観察しながら補償器のパラメータを調整する、といった形での試行錯誤が行われる。その際、試行錯誤の負担を軽減するために、補償器に PID などの比較的単純な構造を仮定して探索するパラメータを限定することがよく行われる。このような設計は確かに簡便ではあるが、パラメータ調整の際に安定性と性能を同時に考慮する必要があるため、試行錯誤に相当量の時間/コストを要することがある。また、補償器の構造が単純であるがために、十分な性能が得られないこともある。それにも関わらず、調整プロセスを終了させる明確な判断基準がないために、本来は達成できない性能を達成しようとして不毛な調整を続けてしまう事態に陥る場合もある。

これに対し、制御対象の数理モデルを構築し、そのモデルに基づいて補償器設計を考えれば、安定性を保証する補償器のパラメトリゼーションや高い性能を達成する補償器の合成^{*}、更には達成可能な性能の限界を明らかにすることも可能となる。補償器の KYJB パラメトリゼーションや最適制御理論はこのようなことが実際に可能であることを示す代表的な例である。

このように制御対象のモデルが得られれば、制御系設計プロセスを効率化することが可能となる。しかしながら、現実には以下に挙げるような状況があり、そもそも制御対象の完全なモデルを得ることはほとんど不可能であることも事実である。

- パラメータ同定やシステム同定を行うためには制御対象の入出力信号を実測する必要があるが、それらの信号にはモデルに陽に含まれていない要因（例えば摩擦）の影響や雑音などが含まれるため、システムの動特性やパラメータ値を正確に求めることができない
- ある時点での物理パラメータの値を求まることができたととしても、材料の経時変化によってパラメータの値が変化することがある。
- 大量生産製品では個体差が存在するので、得られる物理パラメータの値は一般に個体ごとに異なる。

^{*} 要件を満足する補償器を導出するアルゴリズムを与えること。

また、仮に精密なモデルが得られたとしても、それを制御系設計に直接用いることが適当ではないことも多い。例えば、柔軟振動系やむだ時間を有するシステムは無限次元系であり、その特性をそのまま用いた制御系設計は取り扱いが難しい問題となる。また、対象が非線形性を有する場合にも、その特性をそのまま用いた制御系設計は取り扱いが難しくなる。このような場合には、得られているモデルを近似する低次のモデル/線形のモデルを構築し、そのモデルに基づいて設計を考えることも行われる。このような場合にも、近似モデルの特性は精密なモデルや現実の制御対象の特性に厳密に一致することはない。

上記のような理由から、通常、制御対象のモデルを一つ定めるとき、そのモデルと現実の制御対象との間の誤差は避けられない。そのようなモデルは制御対象のおおよその特性を表現するモデルであるので、公称プラントあるいはノミナルプラントと呼ばれる。ノミナルモデルを過信して補償器を設計すると、現実の閉ループ系で設計時に想定した性能が得られないだけでなく、最悪の場合、制御系は不安定になることもある。

これを具体例を用いて示す。例えば、図 3・1 の青色の応答は、次の伝達関数

$$P(s) = P_0(s) e^{-sL}, \quad P_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}, \quad L = 0.6$$

のステップ応答を示したものである。この制御対象には 0.6 秒のむだ時間があるが、それを厳密に考慮すると設計が複雑になる。そこで、このむだ時間を無視し、残りの 2 次伝達関数 $P_0(s)$ に対して制御系を設計することを考える。この場合、 $P_0(s)$ がノミナルプラントとなる。図 3・1 の黒色の応答は $P_0(s)$ のステップ応答である。

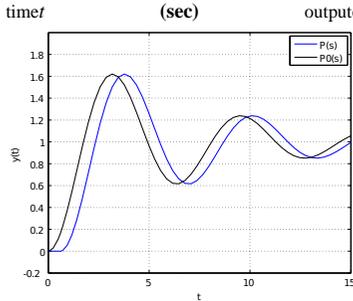


図 3・1 開ループ系のステップ応答

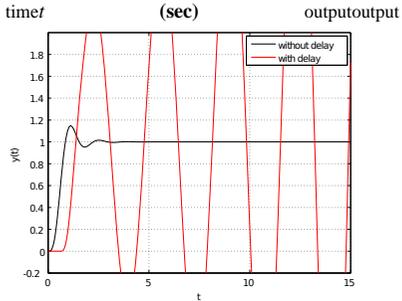


図 3・2 閉ループ系のステップ応答

$P_0(s)$ を用いてある補償器を設計し、それと $P_0(s)$ との開ループ系のステップ応答を求めると図 3・2 の黒色の応答が得られる。しかし、この補償器を $P(s)$ に接続すると、その閉ループ系のステップ応答が図 3・2 の赤色の応答となることから、閉ループ系は不安定になることが分かる。このことから、現実の制御対象とモデルの間の誤差を無視して制御系の設計を行うと、せっかく補償器を設計しても実際の制御対象には適用できないものとなることがある。

上記のような事態を回避しつつも、なおかつモデルを用いた効率的な設計を行うためには、制御対象のノミナルモデルだけでなく、ノミナルモデルと制御対象の間の誤差の情報をも設計プロセスに取り込む必要がある。もちろん、近似モデルしか得られない/使えない以上、誤差を厳密に評価することもできない。そこで、誤差そのものではなく、誤差の範囲を表す情

報を用いて制御系を設計することを考える．例えば，制御対象のあるパラメータ p が 1 から 5 までの間に存在するが，それ以上の詳細が分からない場合には， p が 1 から 5 の範囲のどの値をとっても制御系が安定となるような補償器を設計することを考える．

一般に，制御対象とモデルとの間に誤差があっても，制御系の安定性や必要な性能などが維持される性質を制御系のロバスト性と呼ぶ．更に，必要なロバスト性を有する制御系を不確かさの情報も含んだモデルに基づいて設計する枠組を「ロバスト制御」という．ロバスト制御問題を一般的に定式化すると，制御対象の集合 \mathcal{P} が与えられたとき， \mathcal{P} に属する任意の対象 $P \in \mathcal{P}$ に対して安定性や性能が保証されるような一つの補償器を設計する問題となる．ただし，任意の集合 \mathcal{P} に対して一様に適用可能な万能な設計法を与えることは困難であるので，実際には \mathcal{P} に何らかの構造を仮定することで，その構造に応じた設計法を考えることになる．そのような仮定には，例えば周波数領域で \mathcal{P} を定める場合や，制御対象のパラメータの変動の形で \mathcal{P} を定める場合などが提案されている．

現在までに提案されている様々なロバスト制御系設計法のうち， H_∞ 制御と呼ばれる手法は最も代表的なものである．詳細は後述するが， H_∞ 制御を用いれば周波数領域で特徴づけられた \mathcal{P} に対してロバストな制御系を構成することができる．例えば，前述の例のようにむだ時間を無視することは，むだ時間要素 e^{-sL} を伝達関数 1 で近似することに相当する．このとき，近似誤差 $\delta(s) = e^{-sL} - 1$ のゲイン特性は bf 図 3.3 のようになる．これに対し，伝達関数

$$W(s) = \frac{2.5s}{s+3}$$

を用いると $|\delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$ の関係が成り立つ (図 3.3)．よって， $W(s)$ は誤差の存在範囲を与える伝達関数となっている．このような役割を果たす伝達関数を周波数重み関数と呼ぶ．この $W(s)$ ， $P_0(s)$ に対して H_∞ 制御 (を若干拡張した手法) を用いると， $P_0(s)$ ， $P(s)$ それぞれに対する閉ループ系のステップ応答が図 3.4 のようになる補償器を設計することができる．図 3.4 から明らかなように，むだ時間要素の特性を直接には用いていないにも関わらず， $P_0(s)$ だけでなく $P(s)$ に対しても閉ループ系が安定になっている．

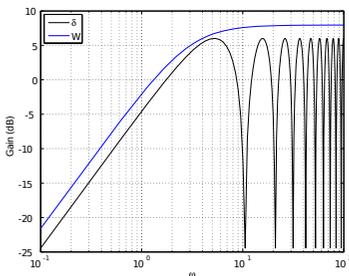


図 3.3 $\delta(s)$ ， $W(s)$ のゲイン線図

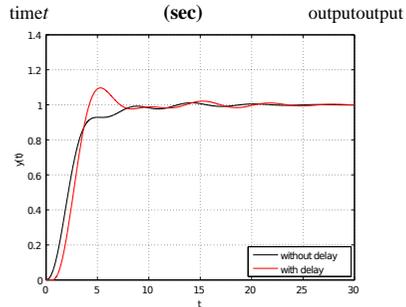


図 3.4 閉ループ系のステップ応答

図 3.4 と図 3.2 を比較すると，図 3.4 の場合には図 3.2 の場合よりも $P_0(s)$ に対する応答がかなり遅いことが分かる．これは，一つの $K(s)$ で $P_0(s)$ ， $P(s)$ 双方を扱わなければならない

いために、おおよそこの程度の性能で限界に達するためである。ただし、 e^{-sL} をより高次の伝達関数で近似するなどして近似誤差を小さくすれば、より良い性能を得ることは可能である。

3-2-2 H_∞ 制御理論

ここでは、最も代表的なロバスト制御系設計法である H_∞ 制御のごく基礎的な部分について説明する。 H_∞ 制御は安定化だけでなく、外乱抑制性能の最適化などにも用いることができる枠組みである。しかしながら、ここではロバスト性を確保するメカニズムを説明するために、その最も基本的な問題である安定化問題に着目する。また、説明を簡単にするために、以降では一入出力系のみを扱う。理論の枠組み自体は多入出力系の場合も同様である。

H_∞ 制御で想定している集合 \mathcal{P} は図 3.5 に示されるようなものである。ここで、 \mathcal{A} は以下の集合である。

$$\mathcal{A} = \{A(s) : A(s) \text{ は安定, } \|A\|_\infty \leq 1\} \quad (3.22)$$

$\|\cdot\|_\infty$ は任意の安定な伝達関数 $P(s)$ に対して

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega} |P(j\omega)| \quad (3.23)$$

と定義されている指標で、 H_∞ ノルムと呼ばれている。式 (3.23) から分かるように、 H_∞ ノルムは伝達関数の最大ゲインを表している。そもそも「ノルム」とは何かの大きさを表す指標のことを指すので、 H_∞ ノルムを用いることは最大ゲインを伝達関数の大きさを表す指標として考えることを意味している。式 (3.22) で定義される \mathcal{A} は、 H_∞ ノルムの意味で大きさが 1 以下の伝達関数の集合を定めたものである。

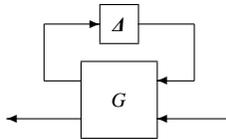


図 3.5 \mathcal{P}

一方、 $G(s)$ は 2×2 のサイズの伝達関数行列である。 $G(s)$ を

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

と分割すると、図 3.5 のシステムの入出力関係は各 $A(s) \in \mathcal{A}$ に対して以下の式で与えられる。

$$G_{22}(s) + G_{21}(s)A(s)(I - G_{11}(s)A(s))^{-1}G_{12}(s) \quad (3.25)$$

式 (3.25) は $A(s)$ と $G(s)$ の上側線形分変換 (upper Linear Fractional Transformation : upper LFT) と呼ばれている。

図 3.5 や式 (3.25) を用いると、周波数領域で不確かさが定められるようなシステムをモ

デル化することができる．例えば，前節の例に挙げたむだ時間付きの 2 次振動系の場合， $|\delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$ の関係が成り立つことから $\delta(s) \in W(s)\mathcal{A}$ と書くことができる．よって，次式の関係が得られる．

$$P(s) = P_0(s) e^{-sL} = P_0(s)(1 + \delta(s)) \in P_0(s) + P_0(s) W(s)\mathcal{A}$$

このことは， $P(s)$ が次の $G(s)$ を用いた式 (3・25) でモデル化できたことを意味している．

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ P_0(s)W(s) & P_0(s) \end{bmatrix}$$

このようなモデル化によって，本来有限次元システムである $P(s)$ の存在領域を有限次元の $P_0(s)$ と $W(s)$ を定めることで書き表すことができる．ほかに，実験条件によって異なる周波数応答が得られる場合には，適当な $G(s)$ を定めることによって，実験で得られたすべての周波数応答が式 (3・25) の周波数応答の集合に含まれるようにすることができる．

制御対象の存在範囲が図 3・5 が与えられたとき，図 3・6 の制御系がすべての $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ に対して安定になるような補償器 $K(s)$ を設計すれば実際の制御対象も安定化することができる．このように，与えられた集合のすべての要素を安定化することを一般にロバスト安定化という．図 3・6 は \mathcal{A} を含む系であるので，これをロバスト安定にする $K(s)$ を求めるためには，それを可能にする原理が必要である．以下の定理はその原理を与えている．

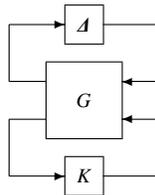


図 3・6 ロバスト安定化問題

定理 2 与えられた伝達関数 $\mathcal{P}_{cl}(s)$ に対して，図 3・7 で与えられるフィードバック接続を考える．このとき，図 3・7 がロバスト安定であるための必要十分条件は， $\mathcal{P}_{cl}(s)$ が安定で $\|\mathcal{P}_{cl}\|_{\infty} < 1$ が成り立つことである．

図 3・7 の $\mathcal{P}_{cl}(s)$ は図 3・6 から \mathcal{A} を除いた部分，すなわち，図 3・8 の閉ループ系に対応する伝達関数である．定理 2 は一巡伝達関数のゲインが 1 未満であれば閉ループ系が安定になることを意味しているので，スモールゲイン定理と呼ばれている．

定理 2 より，図 3・6 がロバスト安定になるためには，図 3・8 の w から z までの伝達関数が安定で，その H_{∞} ノルムが 1 未満となることが必要十分であることが分かる．よって，そのような条件を満足する $K(s)$ を求めることができれば，その $K(s)$ は図 3・6 のロバスト安定化問題の解となる．この設計問題は \mathcal{A} を含まない設計問題であるので，図 3・6 に対して直接設計問題を考えるよりも，その扱いが格段に容易になっていることに注意されたい．

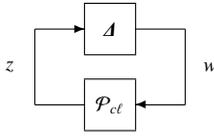
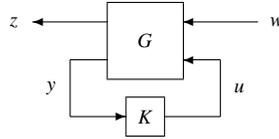


図 3-7 閉ループ系

図 3-8 H_∞ 制御系設計

3-2-3 H_∞ 制御系設計法

以上のように、ロバスト安定化問題は図 3-8 の閉ループ系に対する設計問題に帰着される。これは H_∞ ノルムを規範とする設計問題である。詳細は省略するが、 H_∞ ノルムはロバスト安定性だけでなく、周波数応答の整形や外乱抑制能力の評価にも用いることができる。そこで、 H_∞ ノルムを規範とする設計問題をより一般的な形で定義しておけば、より広い範囲の制御問題にも適用可能となる。よって、ここでは以下の条件を満足する $K(s)$ を求める問題を考える。

- 図 3-8 の閉ループ系を内部安定にする。
- w から z までの伝達関数の H_∞ ノルムを γ 未満とする。

ここで内部安定とは、不安定な極零相殺がなく、かつ安定であるという意味である。 $G(s)$ は一般化制御対象あるいは一般化プラントと呼ばれる伝達関数行列である。ロバスト安定化問題の場合には、制御対象を図 3-5 でモデル化することによって $G(s)$ が得られる。より一般には、 $G(s)$ はロバスト安定性や外乱抑制などの制御仕様を達成するために設計者によって定められるものである。本質的には $G(s)$ には以下の情報が含まれる。

- ノミナルプラント、周波数重み関数などの伝達関数
- A , $K(s)$ が接続される入出力端子
- 上記の要素間の接続関係（結線構造）

設計者はこれらをブロック線図で表現し、それを $G(s)$ とする。

与えられた $G(s)$ に対して上記の条件を満足する $K(s)$ を求める問題を H_∞ 制御問題という。 H_∞ 制御問題を解く場合には、与えられた γ に対して解を求める場合もあれば、 γ を最小化する解を求める場合もある。ロバスト安定化問題の場合には $\gamma = 1$ を与えて解けばよい。外乱抑制を行う場合には γ の最小化が求められる。

H_∞ 制御問題は $K(s)$ の構造を規定しないので、条件さえ満足すればどのような $K(s)$ を用いて解を求めてもよい。例えば、PID 補償器のパラメータを調整することで上記の条件を満足できるのであれば、それでも構わない。しかしながら、一般にそのような調整にはかなりの試行錯誤が必要となる。また、内部安定化する $K(s)$ や所望の γ を達成する γ が得られなかったとき、そもそも本質的に得られない問題なのか、あるいは、 $K(s)$ の構造やパラメータの探索方法が良くないために得られないのかを判断することができない。

一方、 H_∞ 制御問題には複数の解法が知られている。それらの解法を用いれば、問題の可

解性や、また可解である場合には γ の最小値を必要十分の意味で判定することが可能である。また、問題が可解であれば、 $G(s)$ と同じ次数の $K(s)$ が必ず存在することも知られている。よって、そのような解法を用いれば効率的に $K(s)$ を設計することができる。更に現在では、MATLAB 上に H_∞ 制御問題の解を与える数値計算パッケージが構築されているので、解法の実行そのものも容易である。

$G(s)$ を適切に構成すれば、 H_∞ 制御を用いてロバスト安定化を保証しつつ、外乱抑制を達成することも可能である。図 3-4 はそのような方法で設計した例である。ロバスト制御以前の従来の制御系設計は、ノミナルプラントのみを用いていた。一方、ロバスト制御ではノミナルプラントの他に不確かさもモデル化する必要があるので、従来よりもモデリングには多くの労力を要する。ただし、このようにして不確かさもモデル化すれば、現実の制御対象に対して、性能と安定性に関する実質的なトレードオフを陽に扱うことが可能となる。その際、不確かさの大きさは性能を制約するものとして働く。例えば、上記の例では、 $W(j\omega)$ のゲインが大きいほど、不確かさの見積りは大きくなり、結果として得られる性能は悪くなる。よって、不確かさを見積もる際には、 $W(j\omega)$ のゲインができる限り小さくなるように $W(s)$ を与えなければならない。

3-2-4 より深く知るために

精力的な研究が行われた結果、これまでにロバスト制御に関する幅広い知見が得られている。そのすべてを網羅することはそもそも不可能であるが、おおよその雰囲気をつかみたいという場合には解説記事^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} が参考になる。成書については、文献¹⁵ (和訳¹⁶)¹⁷ を参考にされたい。ロバスト制御で用いられる理論は、制御系を入出力システムとして捉えることによって得られる様々な結果に基づいている。入出力システムの解析については文献¹⁸ に基礎的かつ重要な事柄が説明されている。ロバスト制御理論あるいは H_∞ 制御理論については、ほかにも幾つかの教科書^{19) 20) 21)} (和訳²²⁾)^{23) 24)} が出版されている。

ここでの解説は主に H_∞ 制御系設計の問題設定を中心に解説を行ってきたが、 H_∞ 制御はロバスト制御の初歩的な手法であり、実用に際して十分な性能を達成できないことがある。そのような場合に、閉ループ系のロバスト性をより詳細に解析するための手法として μ 解析^{25) 26)}、IQC^{27) 28)} などに関する研究も行われている。ただし、これらの解析を厳密に行うための計算は非常に困難なものであり、現実には何らかの緩和を考える必要がある。それらの解析に基づいた設計に関しても同様であり、実用上は H_∞ 制御系設計問題を適宜修正して間に合わせているのが現状である。

一方、最近になって数値最適化を前提にした解析・設計手法も用いられるようになってきている。特に、問題が線形行列不等式 (LMI) で記述されれば凸最適化手法を用いて効率的に解が得られることが明らかとなったことから、LMI を前提にした様々な理論が展開されるようになった。LMI 及び関連する凸最適化手法については、教科書^{29) 30)} を参考にさせていただきたい。

参考文献

- 1) 浅井, 劉, 藤田: “特集『フレッシュマンのための制御講座』丈夫な制御系をつくる - ロバスト制御, 計測と制御, vol.42, no.4, pp.284-291, 2003.

- 2) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第1回：モデルの不確かさ,” 計測と制御, vol.42, no.7, pp.603–608, 2003.
- 3) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第2回：プラント集合の表現法,” 計測と制御, vol.42, no.8, pp.667–672, 2003.
- 4) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第3回：ノルムに基づくロバスト性解析,” 計測と制御, vol.42, no.9, pp.748–755, 2003.
- 5) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第4回：線形行列不等式,” 計測と制御, vol.42, no.10, pp.859–866, 2003.
- 6) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第5回：線形 H_∞ 制御,” 計測と制御, vol.42, no.11, pp.958–964, 2003.
- 7) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第6回：LMI に基づく線形ロバスト制御系解析・設計,” 計測と制御, vol.42, no.12, pp.1032–1038, 2003.
- 8) 浅井：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第7回：IQC,” 計測と制御, vol.43, no.1, pp.94–101, 2004.
- 9) 井村：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第8回：非線形システムの安定性理論の基礎 – クローズドシステムとオープンシステム –,” 計測と制御, vol.43, no.2, pp.178–185, 2004.
- 10) 井村：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第9回：非線形ロバスト制御のための消散性理論,” 計測と制御, vol.43, no.3, pp.275–282, 2004.
- 11) 井村：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第10回：非線形 H_∞ 制御とその周辺,” 計測と制御, vol.43, no.4, pp.367–374, 2004.
- 12) 申：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第11回：受動性設計の基礎,” 計測と制御, vol.43, no.5, pp.447–453, 2004.
- 13) 申：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第12回：非線形ロバスト制御（その1）,” 計測と制御, vol.43, no.6, pp.508–514, 2004.
- 14) 申：“リレー解説『ロバスト制御の基礎から最先端まで』第13回：非線形ロバスト制御（その2）,” 計測と制御, vol.43, no.7, pp.572–579, 2004.
- 15) J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum : “Feedback Control Theory,” Macmillan Pub. Company, New York, 1992.
- 16) 藤井（監訳）：“フィードバック制御の理論 – ロバスト制御の基礎理論 –,” コロナ社, 1996.
- 17) 細江, 荒木（監修）：“制御系設計 – H_∞ 制御とその応用 –,” 朝倉書店, 1994.
- 18) C.A. Desoer and M. Vidyasager : “Feedback Systems: Input–Output Properties,” Academic Press, 1975.
- 19) B.A. Francis : “A Course in H_∞ Control,” Springer-Verlag, 1987.
- 20) H. Kimura : “Chain Scattering Approach to H_∞ Control,” Springer Verlag, 1996.
- 21) K. Zhou, John C. Doyle, and K. Glover : “Robust and Optimal Control,” Prentice-Hall, 1995.
- 22) 劉, 羅（訳）：“ロバスト最適制御,” コロナ社, 1997.
- 23) 美多：“ H_∞ 制御,” 昭晃堂, 1994.
- 24) 劉：“線形ロバスト制御,” コロナ社, 2002.
- 25) J. Doyle : “Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties,” IEE Proc., **129**-D-6, pp.242–250, 1982.
- 26) A. Packard and J. Doyle : “The Complex Structured Singular Value,” Automatica, **29**-1, pp.71–109, 1993.
- 27) T. Iwasaki and S. Hara : “Well-Posedness of Feedback Systems: Insights into Exact Robustness Analysis and Approximate Computations,” IEEE Trans. Automat. Contr., **43**-5, pp.619–630, 1998.
- 28) A. Megretski and A. Rantzer : “System Analysis via Integral Quadratic Constraints,” IEEE Trans. Automat. Contr., **42**-6, pp.819–830, 1997.
- 29) S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan : “Linear Matrix Inequalities in System and

Control Theory,” SIAM, 1994.

30) 岩崎：“LMI と制御,” 昭晃堂, 1997.

1 群 - 6 編 - 3 章

3-3 適応制御理論

1 群 - 6 編 - 3 章

3-4 ハイブリッド制御理論

(執筆者：井村順一)[2009 年 9 月 受領]

3-4-1 ハイブリッドシステム

ハイブリッドダイナミカルシステム(以下、略してハイブリッドシステムと呼ぶ)とは、離散ダイナミクスと連続ダイナミクスが混在したシステムのことである。離散変数と連続変数が混在したシステム、あるいは、より踏み込んで、事象駆動システムと時間駆動システムが混在したシステムなどと説明されることもある。「ハイブリッドシステム」という用語及び概念は新しいものではなく、1966 年に Witsenhausen¹⁾が既に用いている。ところが、それ以後、研究の進展はほとんどなく、1990 年頃になって、それまで離散事象システムを研究してきたコンピュータ科学の分野の研究者が、実世界(連続時間連続信号)と相互作用する離散事象システム(リアクティブシステム)や、連続時間の概念を取り入れた時間付きオートマタなどを研究し始めたのを契機に、そして、それと同調するようにシステム制御の分野でもハイブリッドシステムのモデリングや制御に興味を抱くようになって生まれた新しい研究分野である^{2, 3, 4)}。

以下では、まず、ハイブリッドシステムのイメージとその意義について述べる。次いで、ハイブリッドシステムを表現するためのモデルとその制御手法に関して代表的なものを説明する。

(1) ハイブリッドシステムとは

ハイブリッドシステムとは、図 3・9 に示すように、オートマトンの各ノードに常微分方程式を割り当てたものであると考えると理解しやすい。オートマトンによって離散ダイナミクス(モード 1 ならばモード 2 に遷移できるといったようにモード遷移に記憶を要するのでダイナミクスである)を表現し、各ノードに割り当てられた常微分方程式によって連続ダイナミクスを表現している。離散ダイナミクスの状態を離散状態(モード)、連続ダイナミクスの状態を連続状態と呼ぶ。車のマニュアルシフトのように外的要因により、あるいは、温度や位置などの連続状態がある閾値を超えるなどの内的要因によりモードが切り換わり、それに伴い、常微分方程式が切り換わったり、あるいは、その解がジャンプしたりする。

連続ダイナミクスは、力学系の運動方程式や化学反応式などに相当する。一方、離散ダイナミクスは、不連続な物理現象により生じるもの(物理的離散事象)とコンピュータプログラムなどにより実現される論理によるもの(論理的離散事象)の 2 種類がある。物理的離散事象を含むシステムとして、例えば、ロボットの 2 足歩行やハンドによる物体操作が挙げられる。歩行では、1 本足と 2 本足の立位相が交互に切り換わり、更に 1 本足から 2 本足への遷移の際に足裏の速度が瞬時に 0 になるので、解のジャンプ現象が生じる。これを図 3・9 のように表現すると、図 3・10 ようになる。一方、論理的離散事象を含むシステムは、図 3・11 のように、コンピュータプログラムによって実現される論理が実システムと混在している状況において見られる。例えば、化学プラントにおける反応炉を想像してみよう。立ち上げモード、定常モード、緊急モードなど様々なモードが存在し、それらによりオートマトン(論理の関係)が構成され、一方、各モードごとに、液体注入用のバルブが開閉したり、あるいはヒーターが ON/OFF したりすることによって微分方程式も切り換わる。更に制御入力と

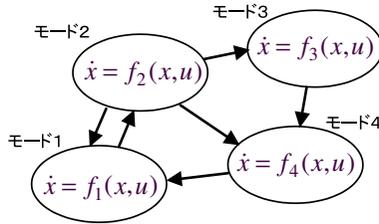


図 3・9 ハイブリッドシステムのイメージ

しては、タンクへの液量のような連続値だけでなく、ヒータなどの ON/OFF スイッチのような離散値も考えられる。センサ出力も同様に、タンクの水位や温度などの連続値だけでなく、温度などを very low, low, normal, high, very high のように量子化した離散値の場合も考えられる。

このように、不連続な物理現象やコンピュータによる論理を含む実システムは、自動車、航空機、ロボットなどの機械システム、電気機器、鉄鋼や化学プラント、通信ネットワーク、遺伝子ネットワークなど身近に多数存在する。このようなシステムの制御系設計では、これまでは、システムを局所的に捉え、連続か離散のどちらかの観点のみに注目し、他方は無視するか、あるいは直感や経験に基づいてヒューリスティックに設計してきたのが現状である。また、様々な工学システム、バイオシステム、人間の行動解析などは複雑な非線形システムとして表現されるが、こうした非線形システムを区分的アファイン関数を持つハイブリッドシステムで近似して解析や設計を容易する手法も多く見られる。連続と離散が混在した系として如何に適切にモデリングするか？、如何に解析するか？、そして如何に最適な制御系を設計するか？、が研究課題である。

ハイブリッドシステムの理論を構築することの魅力を 2 つ挙げる。まず、システムの知能化への一つの新しい数学的枠組みが提供できることにある。これまで主に研究されてきた連続ダイナミクス（運動）の理論に、知能の側面である離散ダイナミクス（論理）に関する理論を組み込むことで制御システムの知能化が期待できる。もう一つは、一分野にとどまらない可能性を秘めていることにある。そもそもハイブリッドシステムという新しい概念は、「動的システム」を扱う様々な研究分野に共有のものである。したがって、このような考え方は、制御やロボットの分野にとどまらず、計測や信号処理など動的システムを研究対象とするすべての研究分野に影響を及ぼすであろう。また、別の視点として、ニューラルネットワークのあるクラスがハイブリッドシステムの一つであることや、知能（論理）を運動とともに考える身体性認知科学など、人工知能の分野とも何らかの接点がある。不連続な微分方程式という立場からは分岐現象やカオス現象などの複雑非線形科学との関連も挙げられる。

表 3・1 にハイブリッドシステムが適用できる主な対象を整理しておく。この表より、ハイブリッドシステム論の大まかな適用対象がイメージできるであろう。ただし、これ以外にも様々な適用対象があることは言うまでもない。

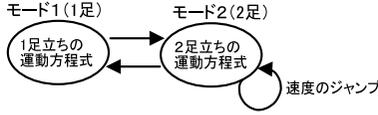


図 3・10 2 足歩行ロボット

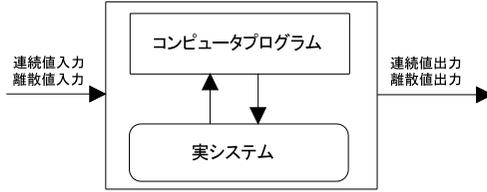


図 3・11 論理的離散事象を含むハイブリッドシステム

(2) ハイブリッドシステムのモデル

一般的なハイブリッドシステムモデルは

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(I(t), x(t), u(t)) \\ I(t) = g(I(t_-), x(t_-), u(t)) \\ x(t) = h(I(t_-), x(t_-), u(t)) \\ y(t) = \psi(I(t), x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3 \cdot 26)$$

で与えられる⁵⁾。ここで、 $t \in \mathcal{R}$ は連続時間、 $I \in \mathcal{N}^\ell$ は、有限集合 \mathcal{N} の直積上に定義された離散状態 (モード)、 $x \in \mathcal{R}^n$ は連続状態、 $u \in \mathcal{N}^{m_1} \times \mathcal{R}^{m_2}$ は制御入力で、 $y \in \mathcal{N}^{p_1} \times \mathcal{R}^{p_2}$ は出力である。また、 f, g, h, ψ は、 $\mathcal{N}^\ell \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ から、それぞれ \mathcal{R}^n 、 \mathcal{N}^ℓ 、 \mathcal{R}^n 、 $\mathcal{N}^{p_1} \times \mathcal{R}^{p_2}$ への写像である。 (I, x) の組で、単に「状態」、もしくは「ハイブリッド状態」などと呼ばれ、 \mathcal{N}^ℓ の要素数は「モード数」と呼ばれる。

式 (3・26) において、第 1 式は、 $I \in \mathcal{N}^\ell$ ごとに通常の常微分方程式であり、連続ダイナミ

表 3・1 ハイブリッドシステムの適用対象の分類

連続事象	離散事象	具体例
物理系	物理的作用 (衝突現象, 摩擦など)	ロボットなどの機械システム
	論理的制約 (命題論理など)	飛行機, 自動車などの制御系
	スケジューリング, 生産計画	化学プラント, 鉄鋼プラント
	離散構造 (ネットワーク, 群行動)	通信・遺伝子ネットワーク, 群制御
	離散値データ (量子化)	量子化制御, ON-OFF センサ/アクチュエータ

クスを表す．また，第 2 式は離散状態の遷移（モードの切換え）を表す．ここで， t_- は時刻 t でモードが切り換わる直前を意味し， $x(t_-) := \lim_{\tau \rightarrow t-0} x(\tau)$ などと定義する．第 2 式は，例えば， $I_+ \in \mathcal{N}^\ell$ と $\mathcal{L}_{I_+} \subseteq \mathcal{R}^\ell \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ によって定義される if-then ルール

$$I(t) = I_+ \quad \text{if } \underbrace{(I(t_-), x(t_-), u(t)) \in \mathcal{L}_{I_+}}_{g(I(t_-), x(t_-), u(t))} \quad (3 \cdot 27)$$

が挙げられる．第 3 式は連続状態の不連続変化（状態のジャンプ）を定義し，第 4 式は出力方程式である．ここで，モードの切換えと状態のジャンプは，連続状態 x によるものと入力 u によるものに区別される．前者は，それぞれ「自律切換え（Autonomous Switching）」、「自律ジャンプ（Autonomous Jump）」と呼ばれ，後者は「制御切換え（Controlled Switching）」、「制御ジャンプ（Controlled Jump）」と呼ばれる．なお，式 (3・26) に対応する離散時間モデルも同様に定義され，その場合，第 1 式を差分方程式に置き換えるなどすればよい．

より具体化したモデルとしては，区分的アファイン（動的）システム（Piecewise Affine System）^{6,7)}，混合論理動的システム（Mixed Logic Dynamical System）⁸⁾，相補性（動的）システム（Complementarity Systems）⁹⁾などが挙げられる．以下では，区分的アファインシステム（以下，PWA システムという）と混合論理動的システム（以下，MLD システムという）について簡単に紹介する．

下記の離散時間 PWA システムは，ハイブリッドシステムモデルのなかで最も標準的であり，これに対して様々な研究がなされている．

$$x(t+1) = A_{I(t)}x(t) + a_{I(t)} + B_{I(t)}u(t), \quad \text{if } (x(t), u(t)) \in S_{I(t)} \quad (3 \cdot 28)$$

ここで， $t \in \{0, 1, \dots\}$ は離散時間， $x \in \mathcal{R}^n$ と $I \in \mathcal{N}^\ell$ はそれぞれ連続状態と離散状態（モード）であり， $u \in \mathcal{R}^m$ は連続入力， $S_I \subseteq \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ はモード I を割り当てる集合である．なお， S_I は連続状態 x に関して与えられるのが一般的である． $(x(t), u(t))$ の値によってモード I が切り換わり，したがって，連続ダイナミクスも切り換わる．なお，出力方程式は必要に応じて表記することにする．

一方，離散時間 MLD システムは

$$x(t+1) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2z(t) + B_3\delta(t) \quad (3 \cdot 29)$$

$$Cx(t) + D_1u(t) + D_2z(t) + D_3\delta(t) \leq E \quad (3 \cdot 30)$$

で与えられる．ここで， $x \in \mathcal{R}^{n_c} \times \{0, 1\}^{n_d}$ は状態， $u \in \mathcal{R}^{m_c} \times \{0, 1\}^{m_d}$ は入力， $z \in \mathcal{R}^{m_2}$ ， $\delta \in \{0, 1\}^{m_3}$ はそれぞれ連続値と離散値の補助変数である．不等式 (3・30) は p 本，すなわち $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ ， $D_i \in \mathcal{R}^{p \times m_i}$ ($i = 1, 2, 3$)， $E \in \mathcal{R}^p$ であり， \leq は要素ごとの大小関係を表す．補助変数 z と δ は，混合整数不等式 (3・30) において x と u が与えられたら一意に定まるとする．すなわち，そもそも， z と δ は x と u の（論理条件などから決まる）非線形関数の値として $(z, \delta) = h(x, u)$ で与えられているものであり，この関数を混合整数不等式で表現していると解釈できる．このシステム表現の特徴は，等式も不等式も（バイナリ変数であることを除けば）すべて線形の形式で表現されていることにある．下記の簡単な例でこの表現方法を説明する．

[例] 有界閉集合 $X \subseteq \mathcal{R}^n$ 上で定義されたモード数 2 の離散時間 PWA システム

$$x(t+1) = \begin{cases} A_0x(t) + a + Bu(t) & \text{if } x(t) \in \mathcal{S}_0 \\ A_1x(t) + a + Bu(t) & \text{if } x(t) \in \mathcal{S}_1 \end{cases} \quad (3\cdot31)$$

を MLD システムとして表現する．ただし， $a \in \mathcal{R}^n$ ， $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ， $\mathcal{S}_0 := \{x \in X | Cx < 0\}$ ， $\mathcal{S}_1 := \{x \in X | Cx \geq 0\}$ ， $C \in \mathcal{R}^{1 \times n}$ とする．

補助変数 $\delta \in \mathcal{R}$ を

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } Cx(t) < 0 \\ 1 & \text{if } Cx(t) \geq 0 \end{cases} \quad (3\cdot32)$$

とおくと，式 (3\cdot31) は次のように表現できる．

$$x(t+1) = A_0x(t) + \delta(t)(A_1 - A_0)x(t) + a + Bu(t) \quad (3\cdot33)$$

そこで， $z(t) = \delta(t)x(t)$ の変数変換，及び式 (3\cdot32) を 0-1 を含む不等式で表現することによって，式 (3\cdot32) と式 (3\cdot33) は，次の近似的に等価な表現に変換できる．

$$\begin{cases} x(t+1) = A_0x(t) + (A_1 - A_0)z(t) + a + Bu(t) \\ \xi_{\min}(1 - \delta(t)) \leq Cx(t) \leq \xi_{\max}\delta(t) - (\delta(t) - 1)\varepsilon \\ \zeta_{\min}\delta(t) \leq z(t) \leq \zeta_{\max}\delta(t) \\ x(t) - \zeta_{\max}(1 - \delta(t)) \leq z(t) \leq x(t) - \zeta_{\min}(1 - \delta(t)) \end{cases} \quad (3\cdot34)$$

ここで， ε は近似の度合いを表す十分小さな正数である．また， $\xi_{\min} := \min_{x \in X} Cx$ ， $\xi_{\max} := \max_{x \in X} Cx$ ， $\zeta_{\min} := \min_{x \in X} x$ ， $\zeta_{\max} := \max_{x \in X} x$ である．式 (3\cdot34) の第 2 式は式 (3\cdot32) を任意の精度で近似している．第 3, 4 式は， $z(t) = \delta(t)x(t)$ の等価表現である．これを式 (3\cdot29), (3\cdot30) の形式で表したものが，式 (3\cdot31) の MLD システム表現となる．

MLD システムは，このようなモードの切換えだけでなく，解のジャンプ現象や離散値入力の場合なども同様に記述できる．また，数理計画分野でよく知られているように，命題論理を 0-1 変数の線形型の不等式で表現することによって MLD システムに組み込める¹⁰⁾．MLD システムの様々な表現例は，文献⁸⁾などを参考にされたい．

(3) ハイブリッドシステムの制御 -MLD システムに基づくモデル予測制御を中心に

MLD システム (3\cdot29), (3\cdot30) において

$$v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ z(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix} \in (\mathcal{R}^{m_1} \times \{0, 1\}^{m_2}) \times \mathcal{R}^{m_3} \times \{0, 1\}^{m_4}$$

$$B = [B_1 \ B_2 \ B_3], \quad D = [D_1 \ D_2 \ D_3]$$

とおくと

$$x(t+1) = Ax(t) + Bv(t) \quad (3\cdot35)$$

$$Cx(t) + Dv(t) \leq E \quad (3\cdot36)$$

と表現できる．これは， v や x に離散値が含まれるが，形式上は拘束線形システムと呼ばれ

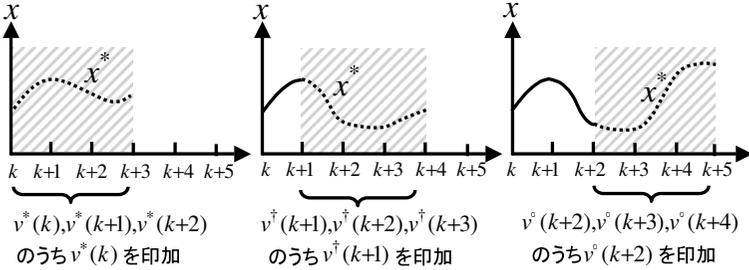


図 3-12 モデル予測制御 (v^*, v^\dagger, v° は各区間での最適解, x^* は最適軌道を示す)

動的システムと同じである。したがって、拘束線形システムに対する有効な制御系設計法の一つであるモデル予測制御手法（3-5 節参照）が、以下に示すように、MLD システムに対しても適用できる⁸⁾。

議論を簡単にするため、原点を目標値とし、評価関数の終端条件を省略した、次の最適制御問題を考える。

問題（有限時間最適制御問題）現在時刻 k での状態 $x(k)$ におけるシステム (3-35), (3-36) に対して、評価関数

$$J(x(k), v) = \sum_{t=k+1}^{k+T} x^T(t) Q x(t) + \sum_{t=k}^{k+T-1} v^T(t) R v(t) \quad (3-37)$$

を最小にする入力 $v^*(t), t = k, k+1, \dots, k+T-1$, を求めよ。ただし、 $Q \geq 0$ (半正定), $R > 0$ (正定) であり、 T は予測ステップ数と呼ばれる。

評価関数 J の第 1 項は状態 x の過渡的な振る舞いに相当する量を、第 2 項は入力 v のエネルギーを表す。

このとき、モデル予測制御とは、図 3-12 に示すように、状態に依存して毎時刻ごとに最適化を行う逐次最適化手法である。具体的には、 J を最小にする入力 v^* を最適入力列と呼ぶものとする、この最適入力列 $v^*(t), t = k, k+1, \dots, k+T-1$ のうち、 $v^*(k)$ のみを現在時刻 k において制御対象に印加し、次に、それにより得られた次の時刻 $t = k+1$ の状態 $x(k+1)$ に対して、上記の問題において k を $k+1$ と置き換えた問題を考え、同様に、最適入力列の 1 ステップ分の入力のみ印加する、といったように繰り返す手法である。

このように、モデル予測制御を適用するには、上記の有限時間最適制御問題を解けばよい。この問題は、式 (3-35) の漸化式を解く、すなわち $x(k+1), \dots, x(k+T)$ を現在状態 $x(k)$ と入力列 $v(k), \dots, v(k+T-1)$ で表現することによって、次の混合整数 2 次計画問題 (MIQP 問題と略す) に帰着される。

$$\begin{aligned} \min_{\bar{v}_k \in V} \quad & \bar{v}_k^T M_1 \bar{v}_k + \bar{v}_k^T M_2 x(k) \\ \text{s.t.} \quad & L_1 \bar{v}_k \leq L_2 x(k) + L_3, \end{aligned} \quad (3-38)$$

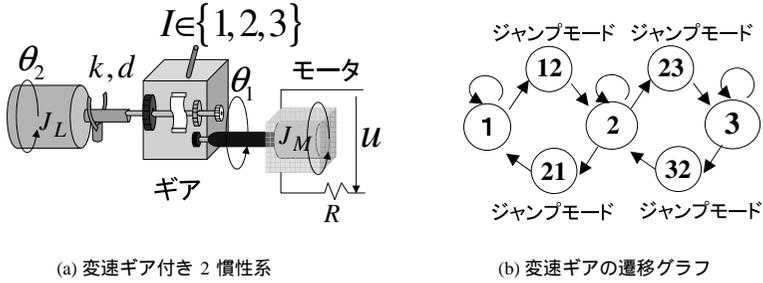


図 3-13 MLD システムのモデル予測制御の例

ここで，入力集合 \mathcal{V} は $\mathcal{V} = (\mathcal{R}^{m_1 T} \times \{0, 1\}^{m_d T}) \times \mathcal{R}^{m_2 T} \times \{0, 1\}^{m_3 T}$ であり

$$\bar{v}_k = \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \\ \vdots \\ v(k+T-1) \end{bmatrix}$$

である．また M_i, L_i は適当な次元の行列である．

この問題は $x(k)$ の値によっては可解でない場合もあり得ることに注意されたい．常に可解であることは，ある種の可制御性問題をあらかじめ解くことによって確かめられる．また，評価関数を 2 次形式でなく，1 次形式で与え，混合整数線形計画問題に帰着する場合も同様である．

以下に，図 3-13(a) に示す 3 変速ギア付き 2 慣性系の位置決め制御問題を考える．このシステムの運動方程式は，状態ベクトルを $x = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]^T$ ，連続入力としてモータへの印加電圧を u ，離散入力としてギア比を I とおくと

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1(I) & a_2 & a_3(I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1(I) & 0 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ a_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

と与えられる．また，ギア比の遷移については図 3-13(b) に示すような制約を設ける．ただし，ギア比の変更によって θ_1 の値にジャンプ現象が生じることに注意して，この現象も一つのモードとして図 3-13(b) 中に加えている．

このとき，連続入力，離散入力を適切に加えることによって θ_2 を適当に与えられた初期値から 0 に遷移させる有限時間最適制御問題を考える．評価関数は適当な行列 Q, R のもとで式 (3-37) を用いた．

上記の運動方程式をモードごとにサンプル周期 0.25 で離散時間状態方程式に書き換え，こ

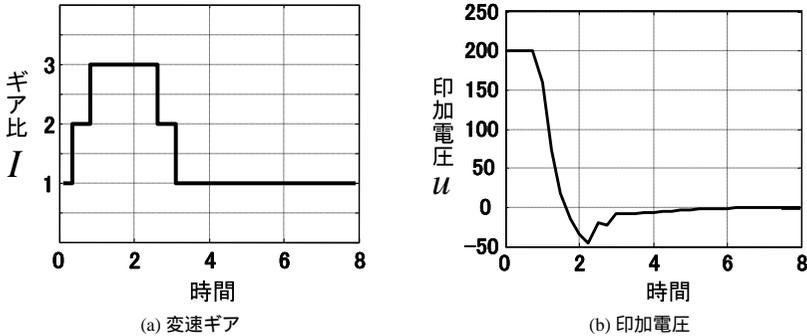


図 3-14 最適化結果

れより式 (3-29), 式 (3-30) の MLD システムを導出し, 式 (3-38) の MIQP 問題に帰着して得られた解が図 3-14 である. ギア変速は 1 速から始まって 3 速へと移り, 静止に向けて 1 速に切り換えていく自然な結果が得られた. 連続入力である印加電圧と協調していつ切り換えるかが重要であり, こうした最適化によって解を得ることが可能となる.

(4) まとめ

ハイブリッドシステムの研究領域は幅広く, ここでは説明できなかったが, システム同定, 可制御・可観測性判別, 安定性解析, 安定化制御, オブザーバなどシステム制御に関連する主な話題について精力的に研究されてきている. ただ, 本システムは本質的に非線形系であるため, 安定性解析などいくつかのトピックでは実用性の高い結果が得られているとはいえない. 今後も精力的な研究が望まれる.

参考文献

- 1) H.S. Witsenhausen: "A class of hybrid-state continuous-time dynamical systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol.11, no.2, pp.161-167, 1966.
- 2) A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher: "An introduction to hybrid dynamical systems," Lecture Notes in Control and Information Sciences, 251, Springer, 2000.
- 3) J. Lunze and F. Lamnabhi-Lagarigue (eds): "Handbook of hybrid systems control: theory, tools, applications," Cambridge University Press, 2009.
- 4) "講座: ハイブリッドシステムの制御 I-VI," システム/制御/情報, vol.51, no.5, pp.230-237, 2007 vol.52, no.5, 181/188, 2008.
- 5) M.S. Branicky, V.S. Borkar, and S.K. Mitter: "A unified framework for hybrid control: model and optimal control theory," IEEE Trans. Automatic Control, vol.43, no.1, pp.31-45, 1998.
- 6) M. Johansson and A. Rantzer: "Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems," IEEE Trans. Automatic Control, vol.43, no.4, pp.555-559, 1998.
- 7) J. Imura and A.J. van der Schaft: "Characterization of well-posedness of piecewise linear systems," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.45, no.9, pp.1600-1619, 2000.
- 8) A. Bemporad and M. Morari: "Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints," Automatica, vol.35, pp.407-427, 1999.

- 9) W.P.M.H. Heemels, J.M. Schumacher, and S. Weiland : “Linear complementarity systems,” SIAM J. Applied Mathematics, vol.60, no.4, pp.1234–1269, 2000.
- 10) H.P. Williams, 小林 (訳) : “数理計画モデルの作成法,” 産業図書, 1995.

1 群 - 6 編 - 3 章

3-5 モデル予測制御