

1群(信号・システム) - 9編(デジタル信号処理)

5章 マルチレート信号処理

(執筆者：池原雅章)[2009年2月受領]

概要

マルチレート信号処理は、システムの内部でサンプリング周波数を変化させたり、サンプリング周波数が異なるシステム間でデータ転送を行うような場合に必要となる技術である。当初マルチレート信号処理は狭帯域のフィルタリングの際の演算量の低減などの目的で用いられていたが、近年ではマルチレートフィルタを複数個並列に接続したフィルタバンクとして用いられ、信号を帯域分割し、サブバンドごとに目的の処理を行うことによって様々な応用が検討されている。フィルタバンクに基づくウェーブレット変換はJPEG2000の変換手法として用いられ、画像の情報圧縮などに広く用いられている。またコサイン変調と組み合わせたMDCTは音声の符号化技術として広く用いられている。また通信の分野でも近年特に注目されているOFDMでもマルチレート信号処理の理論を用いることにより、システムをより明確に記述できる。さらには一般的な画像、動画像信号処理ではフィルタバンクを用いて多重解像度解析を行い低解像度信号から目的の処理を行い、これに基づいて順次高解像度信号を処理することにより、計算量を低減しつつ、より精度の高い処理を行うことができ、信号処理技術として必須のものとなっている。

ここでマルチレート信号処理の基礎的事項をとりあげ、特にフィルタバンクの基本構造である2分割フィルタバンクを中心に話を進め、一般的なMチャンネルの場合にも結果だけをまとめる。またフィルタバンクの有効な実現方法として注目されているリフティングについても紹介する。

【本章の構成】

本章では、マルチレート信号処理の基本作用素であるアップサンプリングとダウンサンプリングを5-1節で述べ、レート変換のために等価変換(5-2節)とポリフェーズ分解(5-3節)を示す。これらの基礎理論をもとに、フィルタバンクについて5-4節で示し、5-5節でリフティング実現について述べる。

1群-9編-5章

5-1 ダウンサンプリングとアップサンプリング

(執筆者: 池原雅章) [2009年2月受領]

マルチレート処理の基本であるサンプリング周波数を低減させるデシメーション (Decimation) と、逆に増加させるインターポレーション (Interpolation) をまずとりあげる。

5-1-1 ダウンサンプリング

サンプリング周波数 $F = 1/T$ で離散化された信号 $x(n)$ のサンプリングレートを整数 M で減少させる過程を考える。すなわち新しいサンプリング周波数は $F' = F/M$ となる。この操作は、図 5-1(a) の下矢印で表され信号の M 番目ごとのサンプルを取り出すことに相当し、

$$v(n) = (\downarrow M)[x(n)] = x(nM) \quad (5-1)$$

と表される。この操作をデシメーションともいい、 M をデシメーション比という。このときサンプリング定理から、エイリアシングが生じないように、サンプリング周波数低減の前に帯域制限フィルタ

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & : |\omega| \leq \pi/M \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-2)$$

で入力信号を帯域制限し、その後サンプリング周波数を低減させる必要がある。

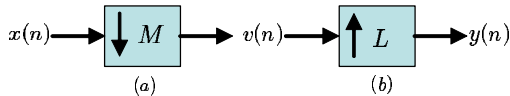


図 5-1 デシメーションとその周波数特性

5-1-2 アップサンプリング

サンプリング周波数 $F = 1/T$ で離散化された信号 $x(n)$ のサンプリングレートを整数 L で増加させる過程を考える。すなわち新しいサンプリング周波数は $F' = FL$ となる。サンプリング周波数を増加させる操作を図 5-1(b) の上矢印で表し、次式のように $x(n)$ のサンプルの間に $L-1$ 個のゼロ値サンプルを挿入する。

$$y(m) = (\uparrow L)[v(n)] = \begin{cases} v(m/L) & : m = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-3)$$

このとき、 $y(m)$ の z 変換は

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)z^{-mL} = V(z^L) \quad (5-4)$$

と表され、周波数応答は

$$Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega L}) \quad (5.5)$$

となる。

5-1-3 ダウンとアップの縦続接続

ダウンサンプリングの周波数特性を調べるために、図 5.1 において $M = L = 2$ とし、(a)(b) を縦続接続する。このとき出力 $y(n)$ は

$$y(n) = (\uparrow 2)(\downarrow 2)x(n) = \begin{cases} x(n) & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases} = \frac{1}{2}\{x(n) + (-1)^n x(n)\} \quad (5.6)$$

と表せる。上式を z 変換すると

$$Y(z) = \frac{1}{2}\{X(z) + X(-z)\} \quad (5.7)$$

が得られる。結局、作用素 $(\downarrow 2)$ の z 変換は

$$V(z) = \frac{1}{X}(z^{1/2} + X(-z^{1/2})) \quad (5.8)$$

と書ける。一般に図 5.1(a) の M によるダウンサンプリングの z 変換は

$$V(z) = \sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k z^{1/M}) \quad (5.9)$$

となる。ここで $W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}$ である。

1群-9編-5章

5-2 ポリフェーズ分解

(執筆著者：池原雅章)[2009年2月受領]

前節のダウンサンプリング，アップサンプリングは以下に述べるポリフェーズ表現を使って，より効果的に実現できる．初めにダウン・アップサンプリングの等価構造を示し，ポリフェーズ分解を導く．

5-2-1 ダウン，アップサンプリングの等価構造

次に図5・2(a)のデシメーション構造を考えてみよう．この出力 $y_1(m)$ の z 変換は

$$Y_1(z) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^n) G((z^{1/M} W^n)^M) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^n) G(z) \tag{5・10}$$

と表され， $G(z) = G(z^{M/M} W_M^{Mk})$ であるから，図5・2(b)の構造に変換できることが分かる．すなわち次式が成り立つ．

$$G(z)(\downarrow M) = (\downarrow M)G(z^M) \tag{5・11}$$

同様に図5・2(c)のアップサンプリング構造は，図5・2(d)の構造と等価であることも容易に証明できる．これは図5・2(c)の出力 $y_1(m)$ の z 変換が

$$Y_1(z) = G(z^L)X(z^L) \tag{5・12}$$

と表現できるからである．すなわち

$$(\uparrow L)G(z) = G(z^L)(\uparrow L) \tag{5・13}$$

が成り立つ．

これらの等価変換は，次に述べるポリフェーズ表現で非常に重要になる．

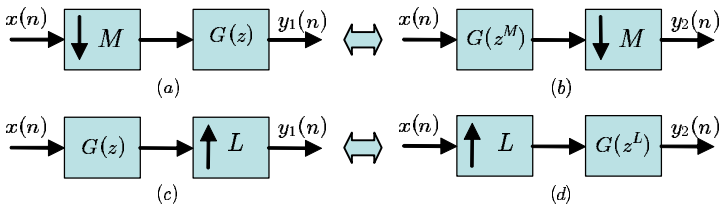


図5・2 ダウン，アップサンプリングの等価表現

5-2-2 ポリフェーズ分解

ポリフェーズ表現はマルチレートシステムにおける最も重要な考え方であり，マルチレートシステムにおいては計算量の低減等有効な実現法である．

FIR 形伝達関数は，一般に

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (5 \cdot 14)$$

と書け，また

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} h(2n+1)z^{-2n} = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \quad (5 \cdot 15)$$

と表現することもできる．更に，ある整数 M に対して

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-n} E_n(z^M) \quad (Type1) \quad (5 \cdot 16)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-(M-1-n)} R_n(z^M) \quad (Type2) \quad (5 \cdot 17)$$

の表現も可能である．このようにポリフェーズ表現は，元のインパルス応答を 1 サンプルづつシフトしながら M 番目ごとのサンプルを取り出すことに相当する．当然 $R_l(z) = E_{M-1-l}(z)$ である．このような表現をタイプ 1 及びタイプ 2 のポリフェーズ表現といい， $E_l(z)$ ， $R_l(z)$ をポリフェーズフィルタとよぶ．後述するフィルタバンクではタイプ 1 のポリフェーズ表現は分割バンクで，タイプ 2 は合成バンクで用いられる．

今図 5・3(a) のダウンサンプリング構造を考える．この構造は式 (5・16) のタイプ 1 のポリフェーズ構造を使って図 5・3(b) に変形できる．更に各ポリフェーズフィルタは z^M の関数であるから前節の等価回路の考え方を適用できる．従ってデシメータは各ポリフェーズフィルタの前にもってこることができ，図 5・3(c) の構造が得られる．ここで各ポリフェーズフィルタは，入力のスプリング周波数の $1/M$ で動作しており，低速での処理が可能となり，演算量は低減される．

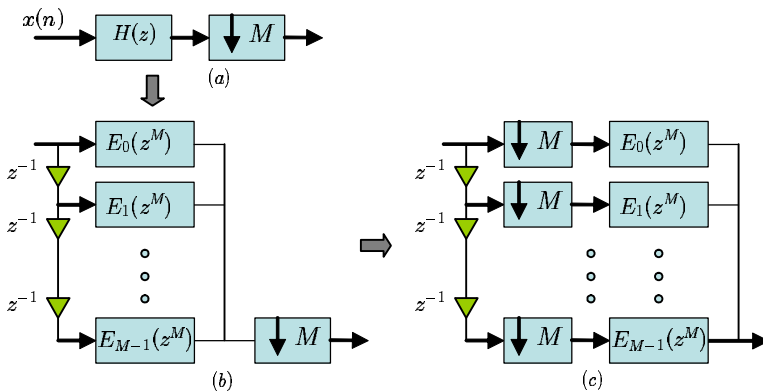


図 5・3 デシメーションのポリフェーズ構造

1群-9編-5章

5-3 フィルタバンク

(執筆者：池原雅章)[2009年2月受領]

フィルタバンクはフィルタの集合体である．典型的な M 分割フィルタバンクを図 5・4(a) に示す．入力信号はまず M 個のフィルタにより均一に M 個の帯域に分割される(図 5・4 参照)．この M 個のフィルタを分割 (Analysis) フィルタ，まとめて分割バンクとよぶ．分割され，ダウンサンプリングされた信号を一般にサブバンド信号という．処理されたサブバンド信号は，再びインターポレーションによって元のサンプリング周波数に戻され，各パスでイメージ (image) 成分を取り除き，最終的にすべてが加算されて一つの出力信号が合成される．図 5・4 の右側の M 個のフィルタを合成 (Synthesis) フィルタ，まとめて合成バンクとよぶ．フィルタバンクの理想的な特性は，フィルタバンクの出力がある時間遅延を含んで入力信号が完全に復元されることである．すなわち c を定数とすると

$$y(n) = cx(n - \ell), \quad Y(z) = cz^{-\ell}X(z) \tag{5・18}$$

とならなければならない．しかしフィルタバンクではダウンサンプリングに伴うエイリアシング歪みが生じる．ここでは符号化のような目的に応じた処理は無視し，エイリアシング歪みがなく，入力信号が完全に復元される完全再構成 (Perfect Reconstruction) フィルタバンクについて議論する．ここで重要になってくるのが前記のポリフェーズ表現である．まず，フィルタバンクの基本である 2 分割フィルタバンクについて説明し， M 分割の場合に拡張する．

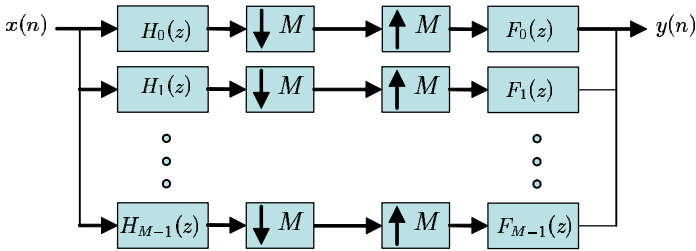


図 5・4 M 分割フィルタバンク

5-3-1 2 分割フィルタバンク

図 5・4 において $M = 2$ として，最も簡単な 2 分割フィルタバンクを考える．ここで $H_0(z)$ と $F_0(z)$ は低域フィルタ， $H_1(z)$ と $F_1(z)$ は高域フィルタである．分割側で $H_0(z)$ と $H_1(z)$ で帯域制限された信号は 2 でダウンサンプリングされ，ここでエイリアシングが生じる．合成側ではアップサンプリングにより元の周波数に変換され， $F_0(z)$ と $F_1(z)$ によりイメージ成分が取り除かれる．ただし，遷移域 ($\pi/2$ 近傍) においてエイリアシング成分が残っている．そこで上と下のパスを加算することにより，エイリアシング成分を互いに打ち消しあい，出力信号として入力信号が完全に復元されることが望まれる．

全体の入出力関係は

$$Y(z) = \underbrace{[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]}_{T(z)} X(z) + \underbrace{[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]}_{S(z)} X(-z) \quad (5 \cdot 19)$$

と表わせる．上式の $T(z)$ が信号伝達関数， $S(z)$ がエイリアシング成分の伝達関数に相当する．出力で入力信号が完全に復元，すなわち c を任意の定数とし $Y(z) = cz^{-\ell} X(z)$ となるには $T(z) = cz^{-\ell}$ ， $S(z) = 0$ となる必要がある．

まず $S(z) = 0$ となるには

$$F_0(z) = H_1(-z) \text{ , } F_1(z) = -H_0(-z) \quad (5 \cdot 20)$$

とすればよい．この関係を使って， $T(z)$ は次式のように書き直せる．

$$T(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) \quad (5 \cdot 21)$$

ここで積フィルタ $R_0(z) = H_0(z)H_1(-z)$ を定義すると，完全再構成が成り立つには

$$R_0(z) - R_0(-z) = cz^{-\ell} \quad (5 \cdot 22)$$

が満たされればよい．従って上式の偶数べきは自動的に消去されるから， ℓ は奇数でなければならぬ．そこで上式の両辺に z^ℓ をかけると

$$z^\ell R_0(z) - z^\ell R_0(-z) = c \quad (5 \cdot 23)$$

が得られる．ここで $R(z) = z^\ell R_0(z)$ とすると， ℓ は奇数だから $-z^\ell R_0(-z) = R(-z)$ となる．実用上重要なフィルタバンクは $R_0(z)$ が線形位相を持つ場合であり， ℓ はその中心点に相当する．従って $R(z)$ は零位相フィルタになる．結局，2 チャンネルフィルタバンクの完全再構成条件は

$$R(z) + R(-z) = c \quad (5 \cdot 24)$$

と表せる．上式の左辺の奇数べきは自動的に零になり，従って定数項を除く偶数べきの係数が零になればよい．このようなフィルタをハーフバンドフィルタという．従って 2 分割完全再構成フィルタバンクの設計問題は，ハーフバンドフィルタを設計し，これを $H_0(z)$ と $H_1(-z)$ に分離する問題に帰着される．あるいは $R(z) = H_0(z)H_1(-z) = H_0(z)F_0(z)$ と書けるから， $H_0(z)$ と $F_0(z)$ に分離すればよい．このような条件を満たすフィルタバンクを双直交フィルタバンクといい，フィルタに線形位相を課すことができ，JPEG2000 で用いられている 9/7,5/3 ウェーブレットはこのタイプである．一方合成側フィルタのインパルス応答が分割側フィルタの時間反転になる， $F_0(z) = H_0(z^{-1})$ の条件を課すこともでき，このようなフィルタバンクを直交フィルタバンクといい，線形位相を課すことはできないものの，エネルギー保存則を満たすことができる．

5-3-2 Mチャンネルフィルタバンク

3 チャンネル以上の任意の M チャンネルフィルタバンクでは、2 チャンネルの場合のような簡単な完全再構成条件を導くことはできない。そこで 2 チャンネルの場合も含めた一般的な完全再構成条件を示す。 M チャンネルの分割フィルタを $H_m(z)$ 、合成フィルタを $F_m(z)(m = 0, 1, \dots, M-1)$ とすると、フィルタバンク全体の入出力関係は

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X(zW_M^n) \sum_{m=0}^{M-1} H_m(zW_M^n) F_m(z) \tag{5.25}$$

と表される。ここで 2 チャンネルの場合と同様に分割・合成フィルタを以下のようにポリフェーズ表現する。

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-n} E_{kn}(z^M), \quad F_k(z) = \sum_{n=0}^{M-1} z^{-(M-1-n)} R_{nk}(z^M) \tag{5.26}$$

このポリフェーズ表現を用いて、分割合成バンクを次式のように表現する。

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{M-1}(z) \end{bmatrix}^T = \mathbf{E}(z^M) \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix}^T \tag{5.27}$$

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) & \cdots & F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \cdots & z^{-(M-1)} \end{bmatrix} \mathbf{R}(z^M) \tag{5.28}$$

ここで $\mathbf{E}(z), \mathbf{R}(z)$ は、 $E_{kn}(z), R_{nk}(z)$ を成分とするポリフェーズ行列とよばれる。このポリフェーズ行列を用いて、図 5.4 の M チャンネルフィルタバンクは図 5.5 のように表現できる。完全再構成条件は 2 チャンネルの場合も含めて、

$$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = \mathbf{z}^{-L} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-r} \\ z^{-1}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

となる。これは図 5.5 の点線部分に相当し、 $r = 0$ とすると単位行列になるから、フィルタバンクは遅延鎖となり完全再構成になることが容易に想像できる。 $r \neq 0$ の場合も遅延が生じるだけで同じ議論ができる。

また $\mathbf{R}(z) = \mathbf{E}^T(z^{-1})$ とし、 $\mathbf{E}^T(z^{-1})\mathbf{E}(z) = \mathbf{dI}$ であるとする、直交フィルタバンクが得られる。

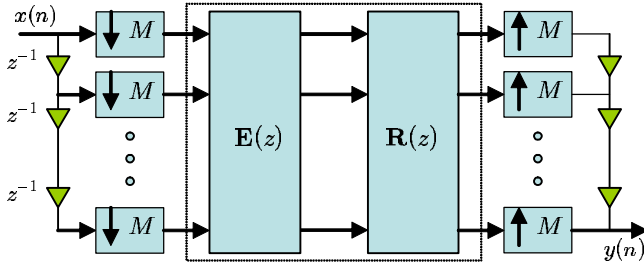


図 5.5 フィルタバンクのポリフェーズ実現

最後に、2 分割を含めて一般的な M 分割フィルタバンクの直交と双直交の場合の完全再構成条件を表 5.1 にまとめる。

表 5.1 直交、双直交フィルタバンクの完全再構成条件

	直交	双直交
インパルス	$h_i(n) = \pm f_j(N - n)$	-
ポリフェーズ	$\mathbf{E}^T(z^{-1})\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}$	$\mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z) = z^{-L}\mathbf{I}$
時間領域	$\sum h_i(n)h_j(n - Mk) = \delta(i - j)\delta(k)$	$\sum h_i(n)f_j(n - Mk) = \delta(i - j)\delta(k)$

1群-9編-5章

5-4 リフティング構造

(執筆者：池原雅章)[2009年2月受領]

前節でフィルタバンクの完全再構成条件を示したが、この条件を満たすフィルタバンクを設計するのは簡単ではない。本節では可逆符号化には不可欠であるリフティングという構造を用いて、構造的に完全再構成を満たす2チャンネルフィルタバンクの実現法を示す。

図5・6はリフティング構造を示している。\$P(z) = 0\$ とすると、分割側で偶数サンプルと、奇数サンプルに分け、アップサンプリングしてゼロを挿入し、1サンプルずらして加算することにより、1サンプル遅れた元のサンプルになることが分かる。これを遅延鎖といい、最も原始的なフィルタバンクである。これを基本に、偶数サンプルを作用素 \$P\$ で処理し、奇数サンプルに加算する。これを荷を降ろす操作としてリフティングという。合成側では同様にリフティングを行い、逆に減算する。この操作を具体的に書くと

$$x_1(n) = x_o(n) + P[x_o(n)] \quad (5\cdot30)$$

$$y_1(n) = x_1(n) - P[x_1(n)] = x_o(n) \quad (5\cdot31)$$

となり奇数サンプルは完全に復元されることが分かる。この際 \$P\$ は任意の作用素を用いることができる。例えば

$$P[.] = \text{round}(\text{任意の作用素}[.])$$

とする。ここで round は丸め作用素であり、変換後の信号は整数となる。すなわち入力信号が整数であれば、出力も整数となり、整数-整数変換が可能となり、可逆符号化が可能となる。偶数サンプルについては何も操作していないからそのままである。これは荷をあげるリフティングの際も同様であり、加減算を逆の操作をすればよい。このリフティングは複数段接続することもでき、合成側では分割側の逆順にするだけである。

図5・6(b)はJPEG2000の可逆モードで用いられている5/3ウエーブレットのリフティング構造を示している。下段の高域フィルタの伝達関数は

$$H_1(z) = \frac{1}{2}(1+z^{-2}) + z^{-1} = \frac{1}{2}(-1+2z^{-1}-z^{-2}) \quad (5\cdot32)$$

と表される。ここでダウンサンプラーを右側に移動させると、\$z^{-1} \to z^{-2}\$ となることに注意されたい。同様に低域フィルタの伝達関数は

$$H_0(z) = z^{-2} + \frac{1}{4}(1+z^{-2})H_1(z) = \frac{1}{8}(-1+2z^{-1}+6z^{-2}+2z^{-3}-z^{-1}) \quad (5\cdot33)$$

となり、5/3ウエーブレットが得られる。

参考文献

- 1) R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, "Multirate Digital Signal Processing," Prentice Hall, 1983.
- 2) P.P. Vaidyanathan, "Multirate Systems and Filter Banks," Prentice Hall, 1993.
- 3) A.N. Akansu and R.A. Haddad, "Multiresolution Signal Decomposition," Academic Press, 1992.
- 4) M. Vetterli and J. Kovacevic, "Wavelets and Subband Coding," Prentice Hall, 1995.
- 5) M.J.T. Smith and T.P. Barnwell, III, "Exact reconstruction techniques for tree structured subband coders," IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., vol. ASSP-34, no.6, pp.434-441, 1986.

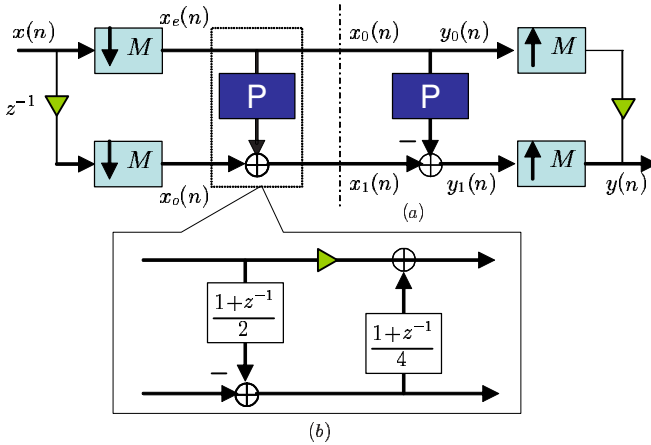


図 5.6 リフティング構造と 5/3 ウェーブレット

- 6) T.Q. Nguyen and P.P. Vaidyanathan, "Two-channel perfect-reconstruction FIR QMF structures which yield linear phase analysis and synthesis filters," IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., vol.ASSP-37, no.5, pp.676-690, 1989.
- 7) P.P. Vaidyanathan, "Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, havin perfect reconstruction property," IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., vol.ASSP-35, no.4, pp.476-492, 1987.
- 8) M. Vetterli and D.Le Gall, "Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations," IEEE Trans. Acoustics, Speech & Signal Process., vol.ASSP-37, no.7, pp1057-1071, 1989.
- 9) 池原, 高橋, "デジタルフィルタ," 培風館, 1996.
- 10) T. Nagai, C.W. Kok, M. Ikehara, and T.Q. Nguyen, "Design and lattice structure of FIR paraunitary filter banks with linear phase," IEICE Trans, vol.E80-A, no.4, pp.712-721.