■1 群（信号・システム）－ 12 編（信頼性理論）

1 章 確率統計の基礎・信頼性データ解析

（執筆者：長塚豪己）[2009 年 9 月 受領]

■概要■

本章では，確率統計の基礎理論及び，信頼性分野にて用いられるデータ解析手法について述べる．信頼性分野では，寿命や故障回数といったものが対象となるため，非負の確率変数を持つ確率分布を用いて解析を進める場合がほとんどである．統計学の基礎理論では，正規分布が中心的な役割を果たす場合が多いが，信頼性では，指数分布，ワイブル分布，ガンマ分布，対数正規分布，逆ガンマ分布などが確率分布として中心的な役割を果たす，また，信頼性では機器や機械の生存率や故障パターンが重要であるため，確率分布関数，確率密度関数，確率関数の代わりに信頼度関数（生存関数），故障率関数や累積ハザード関数がよく使われるのも特色である．寿命を対象にすることが多い信頼性では，すべてのデータを観測するまで観測を続けることは困難である．よって，データは通常打切りを含んでいる．このような点においてほかの分野で用いられるデータ解析手法とは大きく異なる．

【本章の構成】

本章では，基本概念とモデル（1-1 節），信頼性データ（1-2 節），推定（1-3 節），検定（1-4 節）に関して，基礎理論及び各種方法論について述べる．

■1 群 - 12 編 - 1 章

1-1 基本概念とモデル

（執筆者：長塚豪己）［2009 年 9 月 受領］

1-1-1 寿命モデル, 故障時間モデル

(1) 連続時間モデル

(a) 確率分布関数，信頼度関数，確率密度関数

あるアイテムの寿命（あるいは，故障時間）を非負連続確率変数 T で表す．このようなケースは，製品，材料，生物，などの寿命を対象として考える場合に用いられる．また，抗張力，衝撃抵抗，電圧破壊などの性質を対象とする場合にも用いられる．特に断りがなければ，すべての関数は，区間 $[0, \infty)$ 上で定義されているものとする．$f(t)$ を T の確率密度関数とすると，（累積）確率分布関数は，次のように表される．

$$F(t) = \Pr(T \le t) = \int_0^t f(x)dx. \tag{1・1}$$

なお，確率密度関数は，任意の実数 $a \le b$ に対して，

$$\Pr(a < T \le b) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1・2}$$

となるような関数である（紙面の都合上厳密な説明は避けるが，測度論においては，確率密度関数はルベーグ測度から，対象となる確率測度への測度変換を与える密度関数として説明される．詳しくは，参考文献 1) などを参照のこと．密度という言葉はここから来ている）．アイテムがある時刻 t まで生存する確率は，次の信頼度関数（あるいは，生存関数）で表される．

$$S(t) = \Pr(T \ge t) = \int_t^\infty f(x)dx. \tag{1・3}$$

なお，文献によっては $S(t) = \Pr(T > t)$ で定義されているが，T が連続確率変数の場合には本質的な違いはないと考えてよい．

$$\Pr\left(T \le t_p\right) \ge p, \tag{1・4}$$

を満たす実数 t_p は，T（の分布）の p 分位点と呼ばれる．

(b) ハザード関数，バスタブ曲線

時刻 t まで生存してきたアイテムが，時刻 t に瞬間的に死ぬ（故障する）確率は，次のハザード関数で与えられる．

$$h(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Pr(t \le T < t + \delta t | T \ge t)}{\delta t} = \frac{f(t)}{S(t)}. \tag{1・5}$$

信頼性において次の式で与えられるハザード関数は非常に重要な役割を果たす．また，次の累積ハザード関数もよく用いられる．

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx \tag{1・6}$$

目的によっては，累積分布関数や信頼度関数よりもハザード関数の方が便利になる．例えば，

多重打切りデータを取り扱う場合などである．

ハザード関数 $h(t)$ によって表される曲線の中で最も代表的なものは，図 1･1 に示すようなバスタブ曲線である．この曲線は，$t = 0$ 付近では初期故障を表す単調減少曲線となり，次に t が次第に大きくなると，その値がほぼ一定になる偶発故障のかたちを取り，更に，t が大きくなると今度は，故障が摩耗故障となることを意味する単調増加曲線となるものである．この曲線のかたちが西洋式の風呂のかたちに似ていることより，この名で呼ばれるようになった．

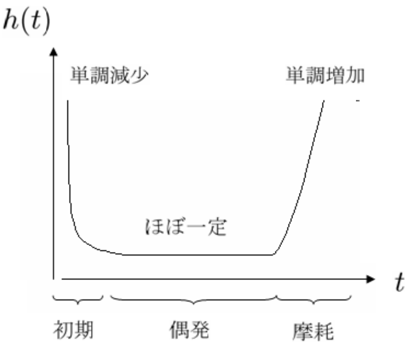

図 1･1　バスタブ曲線

（2）離散時間モデル

あるアイテムの寿命（あるいは，故障時間）を非負離散確率変数 T で表す．このようなケースは，連続値である時間をグループ化し離散的に考える場合に用いられる．また，製品の故障数やその他の事象の生起数を対象とする場合にも用いられる．T が，値 $t_1, t_2, \ldots$ を取りうる非負離散確率変数であるとする．ただし，$t_1 < t_2 < \cdots$ であるとする．このとき，確率関数は，

$$f(t_j) \quad = \quad \Pr\Big(T = t_j\Big), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots.$$

このとき，生存関数は，

$$S(t) = \Pr(T \geq t) = \sum_{j:t_j \geq t}^{\infty} f(t_j). \tag{1･7}$$

このように定義された $S(t)$ は，左連続，非増加の階段関数（step function）で，$S(0) = 1$, $S(\infty) = 0$ である．

離散型ハザード関数は，次のように定義される．

$$h(t_j) = \Pr\Big(T = t_j | T \geq t_j\Big) = \frac{f(t_j)}{S(t_j)}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots$$

■1 群 - 12 編 - 1 章

1-2 信頼性データ

（執筆者：長塚豪己）［2009 年 9 月 受領］

1-2-1 信頼性データの特徴

信頼性データの主な特徴は以下のとおりである（参考文献 3) より引用）.

1. データは寿命データであるので，一つのデータを得るのに費用がかかる．サンプルサイズは通常極めて小さい.
2. データを一つ測定するのに時間がかかることが多い.

1，2 の特徴は，数と時間の壁と呼ばれる．このような，解析に負の影響を与える特徴をもつデータに対して，信頼性分野では特有の解析手法が発達してきた．具体的には，不完全データの取り扱い，共変量を用いた解析，ベイズ法を用いた事前情報の活用などである.

1-2-2 打切りデータ

信頼性データは中途打切りをすることが多い．打切りデータの形式は，主に以下のように分類される.

Type I　打切りデータ，定時打切りデータ

事前に決められた時間に達したときに観測を打ち切る.

Type II　打切りデータ，定数打切りデータ

サンプル数が事前に決められた数に達したときに観測を打ち切る.

区間打切りデータ

故障時点を含み，観測開始時点及び観測終了時点を両端とする区間データ．検査データ，グループデータ，読み出しデータなどで知られる.

ランダム打切りデータ

打切り時間がランダムであるときのデータ.

詳しくは，参考文献 2)，3)，4)，5) などを参照のこと.

■1 群 - 12 編 - 1 章

1-3 推　定

（執筆者：長塚豪己）［2009 年 9 月 受領］

1-3-1 統計モデル

まず，統計モデルについて定義を行う．$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ をある同時確率分布 P に従う n 個の標本とする．通常，分布 P を特徴づけるインデックス θ をつけて，P_θ と表す．θ はパラメータと呼ばれる．θ が取り得る値から構成される集合を Θ とする．Θ はパラメータ空間と呼ばれる．確率分布 P_θ から構成される集合（分布族）を $\mathcal{P}$ とする．つまり，$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$.

1-3-2 ノンパラメトリック推定

（1）Kaplan-Meier 推定（Product-Limit 推定）

n 個のアイテムの寿命を表す確率変数を $T_1, \ldots, T_n$ とする．また，$t'_1, \ldots, t'_n$ を n 個のアイテムの寿命の観測値，あるいは打切り時点とする．このとき，打切り指示子（censoring indicator）δ_i を次のように定義する．

$$\delta_i = I(T_i = t'_i) = \begin{cases} 1 & T_i = t'_i \text{のとき} \\ 0 & T_i > t'_i \text{のとき} \end{cases}$$

また，$t_1 < \cdots < t_k$ を故障時刻とする．ただし，$k \leq n$ である．$j = 1, \ldots, k$ に対して，時刻 t_j において二つ以上の故障が起こり得るとする．更に，$d_j = \sum_{i=1}^{n} I(t'_i = t_j, \delta_i = 1)$ は 時刻 t_j における故障数を表す．また，$t_1, \ldots, t_k$ は，打切り時刻を含むとする．このとき，生存時間関数 $S(t)$ の Kaplan-Meier 推定値は以下のように定義される．

$$\hat{S}(t) = \prod_{j:t_j<t} \frac{n_j - d_j}{n_j}, \tag{1･8}$$

ただし，$n_j = \sum_{i=1}^{n} I\left(t'_i \geq t_j\right)$ である．n_j は時刻 t_j におけるリスクと呼ばれる．推定値 (1･8) は生存時間関数のノンパラメトリックな最尤推定値として得られる．詳しくは，参考文献 4) を参照のこと．

（2）Kaplan-Meier 推定量の分散推定

Kaplan-Meier 推定量の分散の推定値は以下のように与えられる．

$$\hat{Var}[\hat{S}(t)] = \hat{S}(t)^2 \sum_{j:t_j<t} \frac{d_j}{n_j\left(n_j - d_j\right)}, \tag{1･9}$$

式 (1･9) は，Greenwood の公式（Greenwood's formula）と呼ばれる．

（3）Nelson-Aalen 推定

累積ハザード関数の推定値としては，次の Nelson-Aalen 推定値がよく用いられる．

$$\hat{H}(t) = \sum_{j:t_j<t} \frac{d_j}{n_j} \tag{1･10}$$

$\hat{H}(t)$ の漸近分散の推定値については，以下の二つがよく用いられる．

$$\hat{Var}[\hat{H}(t)] = \sum_{j:t_j<t} \frac{d_j(n_j - d_j)}{n_j^3}, \tag{1・11}$$

$$\hat{Var}[\hat{H}(t)] = \sum_{j:t_j<t} \frac{d_j}{n_j^2}, \tag{1・12}$$

大標本においては，両者は近い値となる．しかし，小標本においては，式 (1･11) は真の分散に対して過小評価（underestimate）するのに対し，式 (1･12) は過大評価（overestimate）することが知られている. 参考文献 4) はどちらか一方のみではなく両者を使うべきであると主張している．しかし，小標本の場合には，式 (1･11) に比べて，式 (1･12) の方がバイアスが小さいことが知られていることから，一般には式 (1･12) の方がよく使われているようである.

1-3-3 パラメトリック推定

(1) 最尤法

標本 $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ の分布がパラメトリックモデル $\mathcal{P}$ に属するとし，$f_T(t_1, \ldots, t_n; \theta)$ を標本の同時確率関数，または，同時確率密度関数とする．観測値 $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ について，その同時確率関数及び同時確率密度関数 $f_T(\mathbf{t}; \theta)$ を θ の関数とみなしたものを尤度関数（likelihood function）と呼び，特に，$L(\theta; \mathbf{t})$ などと表される．また，$T_1, \ldots, T_n$ がそれぞれ独立に同一の分布に従い，$\mathbf{t}$ がそれらの観測値であるならば，尤度関数は次のように表される:

$$L(\theta; \mathbf{t}) \quad = \quad f_T(\mathbf{t}; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \theta)$$

ここで，$f(t; \theta)$ は T_i，$i = 1, \ldots, n$ がそれぞれ従う分布の確率関数，または確率密度関数である.

また，尤度関数を最大（あるいは，上限）値を与える，$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{t})$ を最尤推定値という．つまり，

$$\hat{\theta} \quad = \quad \hat{\theta}(\mathbf{t}) = \arg\sup_{\theta} L(\theta; \mathbf{t})$$

更に，観測値 $\mathbf{t}$ を確率変数 $\mathbf{T}$ で置き換えた $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{T})$ を最尤推定量という.

また，尤度関数の対数を取ったもの，$\log L(\theta; \mathbf{t})$ を対数尤度関数という．対数尤度関数 $\log x$ は，x について狭義単調増加関数であるので，尤度関数を最大にする $\hat{\theta}$ は，対数尤度関数も最大にする.

(2) モーメント法

標本 $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ が母集団分布 P_θ，$\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^d$ からの独立標本であるとする．ただし，d はパラメータ数である．ここで，未知パラメータ数を $k(\leq d)$ とし，T_i，の k 次モーメント $E_\theta\left[T_i^k\right]$ は存在するとし，k 次の標本モーメント $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^k$ に対して次の連立方程式を考える.

$$E_\theta\left[T_i^k\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

上式の解，$\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{T})$ をモーメント推定量という．

モーメント法はほかの推定法に対して推定精度がよくない場合が多い．また，一般に一意に決まるわけではない．しかし，比較的簡単に求められるため，簡便法として用いられたり，ほかの推定法において解を求める際の初期値としてよく用いられる．

（3）最小二乗法

$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ を次のような構造をもつ確率変数とし，その実現値を $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ とする:

$$T_i \quad = \quad g_i(\theta_1, \ldots, \theta_k) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ただし，g_i は既知の実数値連続関数，$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$ は未知パラメータ，ϵ_i は平均 0 の確率変数である．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} \{y_i - g_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)\}^2 ,$$

を最小にするような $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{t}) = ((\hat{\theta}_1(\mathbf{t}), \ldots, \hat{\theta}_k(\mathbf{t}))$ を求める方法を最小二乗法といい，その解を最小二乗推定値という．また，観測値 $\mathbf{t}$ を確率変数 $\mathbf{T}$ で置き換えた $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{T})$ を最小二乗推定量という．

■1 群 - 12 編 - 1 章

1-4 検　定

（執筆者：長塚豪己）［2009 年 9 月 受領］

1-4-1 統計的仮説検定

標本 $\mathbf{T}$ が従う同時確率分布 P から構成される分布族を $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ とする．Θ_0 と Θ_1 を互いに排反で，$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ なるパラメータ空間 Θ の部分集合とする．標本 $\mathbf{T}$ をもとにパラメータ θ が Θ_0 と Θ_1 のどちらかに属するかを決定することを統計的仮説検定という．

パラメータ θ がパラメータ空間の部分集合 Θ に含まれるという仮説を帰無仮説といい，$H_0 : \theta \in \Theta_0$ などと表す．一方，$H_1 : \theta \in \Theta_1$ を対立仮説という．

標本 $\mathbf{T}$ が取り得る値から構成される集合 $\mathcal{T}$ の部分集合を考え，その標本の実現値 $\mathbf{t}$ が C に属するときは，帰無仮説を棄却し，そうでないときは採択するとする．このとき，部分集合 C を棄却域という．また，棄却域の補集合を採択域という．検定に用いられる統計量を検定統計量という．帰無仮説のもとでの検定統計量の分布を帰無分布と呼ぶ．

1-4-2 尤度比検定

標本 $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ の分布が統計モデル $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ に属するとする．また，P_θ は，同時確率関数または同時確率密度関数 $f(\mathbf{t}; \theta)$ をもつとする．このとき，尤度比は次のように定義される．

$$LR(\mathbf{t}) \quad = \quad \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{t})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{t})}.$$

ここで，$L(\theta; \mathbf{t})$ は標本 $\mathbf{t}$ に基づく，θ の尤度関数である．帰無仮説 $H_0 : \theta \in \Theta_0$，対立仮説 $H_1 : \theta \in \Theta_1$ の検定において，$LR(\mathbf{t})$ を検定統計量としたときの検定を尤度比検定という．尤度比を $\dfrac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\theta; \mathbf{t})}{\sup_{\theta \in \Theta_1} L(\theta; \mathbf{t})}$ で定義する場合もある．

更に, 帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$, 対立仮説 $H_1 : \theta \neq \theta_0$ の検定における尤度比, $LR(\mathbf{t}) = \dfrac{L(\theta_0; \mathbf{t})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; \mathbf{t})}$. は，帰無仮説が成立するとき，（ある正則条件の下で）$-2 \log LR(\mathbf{t})$ は自由度 k の カイ 2 乗分布に従う．ただし，k は自由パラメータの数である．

1-4-3 適合度検定

ここでは，適合度検定のいくつかの手法について述べる．

（1）Kolmogorov-Smirnov 検定とその拡張

標本 $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ は独立かつ同一に分布関数が F で表される分布に従う標本であるとする．そして，帰無仮説 $H_0 : F = F_0$ 及び 対立仮説 $H_1 : F \neq F_0$，の検定を考える．このとき，Kolmogorov-Smirnov 検定統計量は次のように与えられる:

$$K_n \quad = \quad \sup_{t \in \mathbf{R}} n^{1/2} \left| \hat{F}_n(t) - F_0(t) \right|.$$

ただし，$\hat{F}_n(t)$ は経験分布関数である．上述の帰無仮説及び対立仮説において K_n を検定統計

量としたときの検定を Kolmogorov-Smirnov 検定という．帰無仮説が成立するもとで K_n は，すべての連続分布 F_0 に対して同じ分布をもつという特徴をもつ．

また，K_n と違った分布関数の距離を測るメトリックとして，Cramer-von Mises の統計量族:

$$V_n \quad = \quad n \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{F}_n(x) - F_0(x)\right]^2 \psi(x) dF_0(x).$$

がよく知られている．$\psi(x) = 1$ とすると，Cramer-von Mises 検定統計量となる．また，$\psi(x) = \{F_0(x)\,[1 - F_0(x)]\}^{-1}$ とすると，Anderson-Darling 検定統計量となる．

より詳しい内容については参考文献 8) などを参照のこと．

（2）Peason の χ^2 検定

カテゴリカルデータに対する適合度検定を考える．n 回独立試行列を考え，各回の試行結果は $k+1$ 種類の結果の内の一つにカテゴライズされるとする．各々の試行において j 番目の結果は，確率 p_j で生起するとする．ただし，$\sum_{j=1}^{k+1} p_j = 1$．Y_j を結果が j と出た試行回数とする．このとき，$(Y_1, \ldots, Y_{k+1})$ は次の確率関数をもつ多項分布に従う:

$$P\{Y_1 = y_1, \ldots, Y_{k+1} = y_{k+1}\} \quad = \quad \frac{n!}{y_1! \cdots y_{k+1}!} p_1^{y_1} \cdots p_{k+1}^{y_{k+1}},$$

ただし，$\sum_{j=1}^{k+1} y_j = n$ である．また，$p_{k+1} = 1 - \sum_{j=1}^{k} p_j$ なので，パラメータ空間は $\Theta = \left\{(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbf{R}^k : p_i \geq 0, \sum_{j=1}^{k} p_j \leq 1\right\}$ である．

ここで，帰無仮説 $H_0 : p_j = \pi_j$，$j = 1, \ldots, k+1$，対立仮説 H_1 : ある j において，$p_j \neq \pi_j$，の検定を考える．Karl Peason の検定統計量は以下で与えられる:

$$Q_n \quad = \quad \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\left(Y_j - n\pi_j\right)^2}{n\pi_j}.$$

$n \to \infty$ における Q_n の極限帰無分布は自由度 k のカイ 2 乗分布となる．より詳しい内容については参考文献 8) などを参照のこと．

■参考文献

1) Billingsley, P., “Probability and Measure，3rd ed.,” Wiley, 1995.
2) Nelson，W., “*Applied Life Data Analysis*,” Wiley, 1982.
3) 真壁肇，宮村鐵夫，鈴木和幸，“信頼性モデルの統計解析,” 共立出版株式会社, 1989.
4) Lawless, J.F., “Statistical Models and Methos for Lifetime Data,” Wiley, 2003.
5) Meeker, W.Q. and Escobar, L.A., “Statistical Methods for Reliability Data,” Wiley, 1998.
6) Lehmann, E.L. and Casella, G., “Theory of Point Estimation，2nd ed.,” Springer, 1998.
7) Cox, D.R. and Hinkley, D.V., “Theoretical Statistics,” Chapman & Hall, 1974.
8) Lehmann, E.L. and Romano, J.P., “*Testing Statistical Hypotheses*，*3rd ed.*,” Springer, 2005.