

■4群(通信工学) -2編(アンテナ・伝搬)

10章 アンテナの設計・解析方法

(執筆者: 福迫 武) [2010年5月 受領]

■概要■

無線技術の発達はアンテナへの要求を厳しくしてきたが、それに対応すべく複雑な形状のアンテナが研究されるようになった。アンテナの設計においては、電界と磁界の振る舞いを記述したマクスウェルの方程式と境界条件の適用により、アンテナ周辺の電磁界の振る舞いや電気的特性を目に見える形で理解することが必要とされる。その結果、簡単な理論に基づくアンテナの設計試作実験の繰り返しだけでは時間と費用を多く必要とするため、目に見えないアンテナ周辺の電磁界の振る舞いや電気的特性をどう早く正確に計算で求めるかという要求は当然高まり、より複雑な計算方法を必要としてきてきた。一部を除いてその特性を解析的に解くことは難しく、近年のコンピュータの性能の発達にともない、コンピュータに適した電磁界解析手法の研究者は、複雑な形状を早く正確に計算するために良い方法を考案してきており、現在のアンテナ設計技術者にとって、その成果は必要不可欠な設計手段となっている。

その一方、近年発達してきた各種電磁界解析手法に基づくシミュレータが数多く市販されるようになり、現在では多くのアンテナ設計技術者により、日常的に利用されている。このようなシミュレータソフトは多くは使い勝手が良く、短時間で結果を出してくれるため、アンテナ技術者にとってはプログラムを組むような作業は省略でき、新しいアイデアの抛出のみに集中でき、研究成果や製品開発を促進させる。しかしながら、使用条件や適用条件が正しくなくとも、シミュレータが何の警告も出さないまま結果を出すこともあり、得られた結果を盲目的に信じることは危険である。結局のところ、シミュレータの出した答えが正しいかどうか結論を出す責任はユーザーにあり、そのためには、使用しているシミュレータの計算手法や特徴を知っておくことが重要である。

本章では、アンテナの設計によく使われる方法を取り上げ、それぞれについて概説した。また、できるだけ短く、かつ分かりやすくするために、厳密性を多少犠牲にした部分もあるため、適宜、参考文献で補っていただきたい。また、市販シミュレータのユーザーにとっても、これらの手法を深く学び、一度は自分でプログラムを組むことは、シミュレータを使いこなすことはもちろん、アンテナにおける電磁界の振る舞いを深く理解することにつながるので、挑戦していただくことをお勧めする。

【本章の構成】

本章では、アンテナの設計・解析方法によく使われる解析手法を概説する。まずは、基本的な線状ダイポールアンテナなどの入力インピーダンスや相互インピーダンスの解析に使われる、起電力法(10-1節)。次に、変分法と ICT 法(10-2節)、最近のシミュレータの手法としてもよく使われるモーメント法(10-3節)、有限要素法(10-4節)、FDTD法(10-5節)を紹介する。

■4群 - 2編 - 10章

10-1 起電力法

(執筆著：福迫 武) [2010年5月 受領]

起電力法 (Induced Electromotive Force Method : EMF 法) は、線状アンテナの電流分布が分かっている場合において、自己インピーダンスや多素子の場合の相互インピーダンスを計算する方法として、長く用いられてきた。電流分布を \mathbf{J}_0 とし、これによる電界を \mathbf{E} とすると、 Z は

$$Z = -\frac{1}{|I_0|^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV \quad (10 \cdot 1)$$

で求めることができる。ここで、* は共役複素数であり、 $|I_0|$ は給電点電流の絶対値、 V は線状アンテナが存在する空間である。

ここで、細線近似により、全長 $2l$ で半径 a の直線状のダイポールの自己インピーダンスを求めてみる。線状アンテナ素子上の電流を $I(z)$ とし、それにより発生するアンテナ表面上の z 方向への電界を E_z とすると、 Z は

$$Z = -\frac{1}{|I_0|^2} \int_{-l}^l E_z(z) I^*(z) dz \quad (10 \cdot 2)$$

で与えられる^{1),2)}。アンテナ半径が十分に細く、かつアンテナ全長が半波長以下程度の場合、

$$I(z) = I_0 \frac{\sin k_0(l-|z|)}{\sin k_0 l} \quad (10 \cdot 3)$$

で電流分布を仮定した場合、 E_z は波動方程式と放射条件より、以下のように与えられる。

$$E_z = -j \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_0}{\sin k_0 l} \left(\frac{e^{-jk_0 r_1}}{r_1} + \frac{e^{-jk_0 r_2}}{r_2} - 2 \cos k_0 l \frac{e^{-jk_0 r_0}}{r_0} \right) \quad (10 \cdot 4)$$

ここで、 r_0, r_1, r_2 は図 10・1 に示されるように、給電点及びアンテナ両端と観測点の間の距離である。自己インピーダンスは、式(10・3)、(10・4)を式(10・2)へ代入し、半径 $d = a$ に沿って z 方向へ積分することで、余弦積分 $C_i(x)$ と正弦積分 $S_i(x)$ を含んだ形で求められる^{1),2)}。

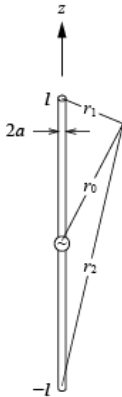


図 10・1 線状ダイポールアンテナ³⁾

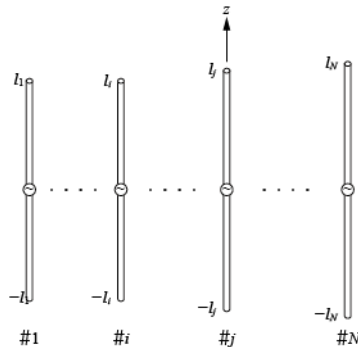


図 10・2 直線状ダイポールアレーアンテナ³⁾

起電力法により、多素子の線状アンテナの相互インピーダンスも求めることができる。例えば、図 10・2 に示す N 素子ダイポールアレーアンテナの i 番目と j 番目の素子の相互インピーダンス Z_{ij} は

$$Z_{ij} = -\frac{1}{I_i^*(0)I_j(0)} \int_{-l_i}^{l_i} E_{jz}(z)I_i^*(z)dz \quad (10 \cdot 5)$$

で求めることができる。ただし、 E_{jz} は j 番目の素子から生じた i 番目のダイポール素子の中心軸における電界の z 成分であり、 $I_i(0)$ 、 $I_j(0)$ はそれぞれの素子の給電点における電流である。

■参考文献

- 1) 虫明康人, 安達三郎, “基礎電波工学,” 共立出版, 1970.
- 2) 安達三郎, “電磁波工学,” 電子情報通信学会(編), コロナ社, 1983.
- 3) 電子情報通信学会(編), “アンテナ工学ハンドブック(第2版),” オーム社, 2008.

■4群 - 2編 - 10章

10-2 変分法と ICT 法

(執筆者：福迫 武) [2010年5月 受領]

10-1 節の起電力法は、電流分布が正確に与えられていることが前提であるが、ダイポールアンテナの長さが半波長より長くなると精度が低下する。この解決のために変分法が導入された。ここで、図 10・1 のダイポールアンテナの表面における放射電界 E_z を次のように与える。

$$E_z^s(z) = -j\omega\mu_0 \int_{-l}^l G_{zz}(z, z') I(z) dz \quad (10 \cdot 6)$$

なお、式(10・6)のうち、 $I(z)$ はアンテナの電流分布であり、アンテナの中心軸を流れていると仮定している。また、 G_{zz} は次のような自由空間中のダイアディックグリーン関数である。

$$G_{zz}(z, z') = \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-jk_0 \sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{(z-z')^2 + a^2} \quad (10 \cdot 7)$$

ダイポールアンテナの給電点には電圧 V_0 が印加されており、給電点のギャップの大きさを 0 とすると、外部から電界 $E_z^{inc}(z) = V_0 \delta(z)$ が入射したことに等価である。アンテナ表面で、全電界の接線成分が 0 となる境界条件

$$E_z^s(z) + E_z^{inc}(z) = 0, \quad \rho = a \quad (10 \cdot 8)$$

が成立するので、次の式が成立する。

$$V_0 \delta(z) = -j\omega\mu_0 \int_{-l}^l G_{zz}(z, z') I(z') dz' \quad (10 \cdot 9)$$

式(10・9)の両辺に $I(z)$ を乗じて $-l$ から l までアンテナの表面に沿って積分すると、式(10・9)の左辺が $V_0 I(0) = Z I^2(0)$ となることに注意すると、アンテナの入力インピーダンスは

$$Z = \frac{j\omega\mu_0 \int_{-l}^l \int_{-l}^l I(z) G_{zz}(z, z') I(z') dz' dz}{I^2(0)} \quad (10 \cdot 10)$$

となる^{2), 3)}。この式は、物理的には、電流分布に多少の誤差が含まれていてもインピーダンスの値の誤差が小さい停留表示である。同時に、式(10・10)は汎関数とも呼ばれ、電流を少し変化させて $I(z) \rightarrow I(z) + \delta I(z)$ としたとき、インピーダンスの変化 δZ を求めると

$$\delta Z \propto \{\delta I(z)\}^2 \quad (10 \cdot 11)$$

であることを示すことができる。

計算の精度を高めるには、電流分布を一つの関数ではなく、複数の基底関数に未定係数をかけて足し合わせた形で電流分布を表現する方がよい。すなわち、

$$I(z) = \sum_{i=1}^N I_i f_i(z) \quad (10 \cdot 12)$$

となる、これを式(10・10)に代入すると、入力インピーダンス Z は

$$Z = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M I_i Z_{ij} I_j / \left(\sum_{i=1}^M I_i \right)^2, \quad Z_{ij} = j\omega\mu_0 \int_{-l}^l \int_{-l}^l f_i(z) G_{zz}(z, z') f_j(z') dz' dz \quad (10 \cdot 13)$$

この表示式は停留表示であり、 $\partial Z / \partial I_i = 0$ が成立することから、

$$\sum_{i=1}^M Z_{ij} I_j = V_0 \quad (10 \cdot 14)$$

の連立方程式が得られ、未定係数 I_j から電流分布が求められる。以上のように、積分を含む汎関数を求め、その最大・最小(停留値)から未知関数を求める方法は変分法と呼ばれる。

式(10・12)の電流分布 $I(z)$ を求める基底関数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ に関して、Tai⁴⁾ は

$$f_1(z) = \frac{\sin k_0(l-|z|)}{\sin k_0 l}, \quad f_2(z) = \frac{(l-|z|) \cos k_0(l-|z|)}{\cos k_0 l} \quad (10 \cdot 15)$$

を用いて変分法によるダイポールアンテナの解析を行っている。

一方、図10・2に示したダイポールアレーアンテナの# i の素子の電流分布を $I_i(z)$ としたとき、この素子の入力インピーダンス Z_i は式(10・10)と同様に

$$Z_i = \frac{j\omega\mu_0 \sum_{j=1}^N \int_{-l_j}^{l_j} \int_{-l_j}^{l_j} I_i(z) G_{zz}(z_i, z_j') I_j(z_j') dz_j' dz_i}{I_i^2(0)} \quad (10 \cdot 16)$$

となる。すべての素子の電流分布にわずかな変化を与えたとしても、個々の素子の入力インピーダンスの変化 δZ_i は0と停留表現とはなっていない。これに対し、稲垣⁵⁾は、式(10・16)から

$$\sum_{i=1}^N I_i^2(0) \delta Z_i = 0 \quad (10 \cdot 17)$$

を導き、Improved Circuit Theory (ICT) 法と名付けた。これはダイポールアレーの高精度な解析が可能であり、八木・宇田アンテナの解析に広く用いられている。

■参考文献

- 1) 電子情報通信学会(編), “アンテナ工学ハンドブック(第2版),” オーム社, 2008.
- 2) 虫明康人, 安達三郎, “基礎電波工学,” 共立出版, 1970.
- 3) R. E. Collin and F. J. Zucker, “Antenna Theory,” McGraw-Hill, New York, 1969.
- 4) C. T. Tai, “A Variational Solution to the Problem of Cylindrical Antennas,” Stanford Res. Inst., Stanford, CA, Tech. Rep. 12, 1950.
- 5) N. Inagaki, “An improved Circuit Theory of a Multielement Antenna,” IEEE Trans. Antennas & Propag., AP-17, 2, pp.120-124, Mar. 1969.

■4群 - 2編 - 10章

10-3 モーメント法

(執筆者：福迫 武) [2010年5月 受領]

モーメント法 (Method of Moment : MoM) とは、微分方程式や積分方程式を連立方程式に変形し、数値的に解く方法であり、アンテナでは、導体表面の電流分布を求める^{1),2)}。

図 10・3 のように、完全導体のアンテナや散乱体に外部から電界 E^{inc} が入射した場合を考えると、完全導体表面の電界の接線成分は、導体表面 S において

$$[E^s(\mathbf{r}) + E^{inc}(\mathbf{r})]_t = 0, \quad \mathbf{r} \text{ on } S \tag{10・18}$$

で与えられる。 S の面電流密度 J_s に対する電界積分方程式は

$$E_t^{inc}(\mathbf{r}) = j\omega\mu_0 \int_S [G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot J_s(\mathbf{r}')]_t dS' \tag{10・19}$$

で与えられる。ここで E^{inc} は導体が存在しないときの入射電界、 E^s は導体表面を流れる未知の面電流密度 J_s によって生じる散乱電界、添え字 t は接線方向を表し、 G_0 は自由空間のダイアドティックグリーン関数である。

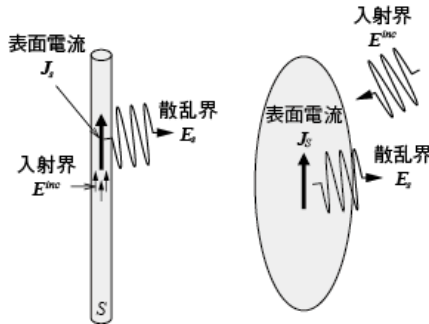


図 10・3 面状アンテナ (散乱導体) と入射電界 E^{inc} ³⁾

モーメント法では、式(10・19)の電界積分方程式を解くために、未知の面電流密度 J_s を基底関数 $f_n(\mathbf{r}')$ と未定電流係数 I_n を用いて、次のように展開する。

$$J_s(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N I_n f_n(\mathbf{r}') \tag{10・20}$$

式(3・20)を式(3・19)に代入し、重み関数 $w_m(\mathbf{r})$ を乗じて両辺を積分することにより、式(10・19)は

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \tag{10・21}$$

のような線形連立一次方程式に変形できる。ここで、式(10・21)中の既知の係数である電界係数 V_m と自己・相互インピーダンス Z_{mn} はそれぞれ次のように与えられる。

$$V_m = \int_S w_m(\mathbf{r}) \cdot E^{inc}(\mathbf{r}) dS \tag{10・22}$$

$$Z_{nm} = j\omega\mu_0 \int_S \int_S \mathbf{w}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dS' dS \quad (10 \cdot 23)$$

ただし、 \mathbf{W}_m は試行関数である。よって、式(10・22)と式(10・23)を数値的に求めて(10・21)の連立方程式を数値的に解くことで、未知の電流係数 I_n が求められ、式(10・20)から電流分布が求められる。

基底関数は、 S 全体で定義された全領域基底関数と、あるセグメント（部分領域）内のみ値をもち、他を0とする部分領域基底関数が考えられるが、後者の方は任意形状に適用しやすい。一方、試行関数も同様に全領域と部分領域の関数が考えられるが、基底関数と試行関数を等しくするガラーキソ法は変分法と等価であり^{1),2)}、高い精度が期待できる。

■参考文献

- 1) R. F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods," IEEE Press, 1993(reprint). (Macmillian Co., New York, 1968)
- 2) R. Mittra, "Computer Technique for Electromagnetics," Pergamon, New York, 1973.
- 3) 電子情報通信学会(編), "アンテナ工学ハンドブック(第2版)," オーム社, 2008.

■4群 - 2編 - 10章

10-4 有限要素法

(執筆者：福迫 武) [2010年5月 受領]

有限要素法は、対象となる微分方程式を解く代わりに、その系に対応する汎関数を求め、その極値について変分原理を適用して解く方法である。この時、対象を細かい要素に分割し、その一つ一つに等価の離散化モデルを作り、次に全体を組み立てるところに特徴があり、任意形状への適合が容易である。一方、要素に分割して取り扱うものであれば、汎関数が存在しない場合に用いられる重み付け残差法（ガラーキン法もその一つ）など、変分原理を用いないものも有限要素法と呼ばれる。

10-4-1 汎関数と変分原理

任意の三次元領域 Ω を考え、その境界 Γ を Γ_f と Γ_n とに分けて、これらの境界上で Γ_f にて

$$f = u \tag{10・24}$$

の境界条件を満たし、 Γ_n にて

$$n_x \frac{\partial h}{\partial f_x} + n_y \frac{\partial h}{\partial f_y} + n_z \frac{\partial h}{\partial f_z} + wf = v \tag{10・25}$$

の境界条件を満たすとする。ここに、 h は $h = h(x, y, z, f, f_x, f_y, f_z)$ のような任意の関数であり、 f_x, f_y, f_z は f の x, y, z による偏微分を表す。また、 u, v, w は既知関数であり、 n_x, n_y, n_z は Γ 上の外向き単位法線ベクトルの x, y, z 成分である。

さて、この系の汎関数を

$$F = \int_{\Omega} h d\Omega - \int_{\Gamma_n} \left(vf - \frac{w}{2} f^2 \right) d\Gamma \tag{10・26}$$

とすると、未知関数 f とその変動関数 $\delta f, \delta f_x, \delta f_y, \delta f_z$ による F の変化分 δF が、 $\delta F = 0$ を満たして極値をとるためには、 f は領域 Ω において

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial f_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial f_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial f_z} \right) - \frac{\partial h}{\partial f} = 0 \tag{10・27}$$

と式(10-25)を境界 Γ_n 上において満たす必要がある¹⁾。

ここで、

$$F = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 - A f^2 \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_n} \left(vf - \frac{w}{2} f^2 \right) d\Gamma \tag{10・28}$$

のような汎関数を考える。式(10-27)から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - A f = 0 \tag{10・29}$$

と書けるが、これはヘルムホルツ方程式であり、 A は固有値と呼ばれる。また、式(10-25)の自然境界条件は

$$n_x \frac{\partial f}{\partial x} + n_y \frac{\partial f}{\partial y} + n_z \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial n} = v - wf \quad (10 \cdot 30)$$

となる。結局、式(10・24) (ディリクレ条件)、式(10・30) ($w = 0$ でノイマン条件、 $w \neq 0$ でロバン条件)の境界条件の下で式(10・29)のヘルムホルツ方程式を解くということは、式(10・28)の汎関数を最小にする関数 f を求めることに相当する。ここで、式(10・30)は変分演算に自動的に組み入れられる自然境界条件なので考慮する必要はなく、式(10・24)の強制境界条件のみ考慮すればよい。

汎関数の極値問題を具体的に解く方法で標準的なものがリッツ法である。例えば、式(10・28)の汎関数の未知関数 f を

$$f = f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \cdots + a_n f_n \quad (10 \cdot 31)$$

のように、展開係数 a_1, a_2, \dots, a_n をもつ関数列 f_1, f_2, \dots, f_n の和で表す。ここで、 f_0 は境界条件(10・24)を満たす関数であり、 f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は境界 Γ_f 上で $f_i = 0$ となる試験関数である。これを式(10・28)に代入し、 $\partial F / \partial a_i = 0$ として a_1, a_2, \dots, a_n に関する n 元連立一次方程式を導き、これを解くことで f を求められる。

10-4-2 重み付け残差法

変分法は汎関数を必要とするが、汎関数が存在しない場合は重み付け残差法を用いて弱形式と呼ばれる巨視的な方法で汎関数に対応する積分形の関係式を得ることができる。ここで、ヘルムホルツ方程式をディリクレ条件とロバン条件の下で解くものとする。ヘルムホルツ方程式の解 f をディリクレ条件を満たす解 g で近似して式(10・29)、式(10・30)に代入すると

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \Lambda g = R_\Omega \quad (10 \cdot 32)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} + wg - v = R_\Gamma \quad (10 \cdot 33)$$

のように誤差 R_Ω, R_Γ が生じるはずである。そこで、境界 Γ_f 上で $W = 0$ となる関数 W を用意してこの関数で重み付けした残差が領域全体にわたって平均的に 0 となるように

$$-\int_\Omega WR_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma_n} WR_\Gamma d\Gamma = 0 \quad (10 \cdot 34)$$

とし、式(10・32)、式(10・33)を代入し、領域積分項を部分積分し Γ_f 上で $W = 0$ を考慮する。この結果

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \Lambda g \right) d\Omega - \int_{\Gamma_f} W \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_n} W \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_n} W \left(\frac{\partial g}{\partial n} + wg - v \right) d\Gamma \\ & = \int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} - \Lambda g \right) d\Omega - \int_{\Gamma_f} W(v - wg) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (10 \cdot 35)$$

を満たす近似解 g は、式(10・29)の f に比べて微分可能性が弱められており弱形式と呼ばれる。

未知関数 g を求める方法には、重み関数の選び方によって種々の方法があるが、重み関数に基底関数と同じ関数を選ぶ Galerkin 法はその一つである。式(10・29)の近似解 g を

$$g = W_0 + a_1 W_1 + a_2 W_2 \cdots + a_n W_n \quad (10 \cdot 36)$$

とし、展開係数 a_1, a_2, \dots, a_n をもつ関数列 W_1, W_2, \dots, W_n の和で表す。ここで W_0 は境界条件 (10・24) を満たす関数であり、 $W_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は境界 F_f 上で $W_i = 0$ となる試験関数である。これを式(10・35)に代入し、ガラーキン法であることより重み関数を W_i として a_1, a_2, \dots, a_n に関する n 元連立一次方程式を解いて g を求める。なお、汎関数が存在する場合、リッツ法の場合とガラーキン法の場合共に、最終的に得られる連立方程式は同じ結果となる。

10-4-3 要素と要素方程式

解析対象とする領域全体に対して、式(10・31)や式(10・36)のような試験関数の選択は、複雑な境界形状であったり、急変する未知関数 f などの場合、試験関数の選択そのものが困難になる。そこで有限要素法では、図 10・4 に示すように解析領域 Ω を要素と呼ばれる小さな領域に分割して、その一つ一つにリッツ法やガラーキン法を適用し、それぞれの要素 e に対する離散方程式 (要素方程式) を導く。このとき、試験関数は要素ごとに設定される。このように導出された要素方程式をすべての要素について重ね合わせ、系全体に対する離散方程式 (全体方程式) を組み立てる。

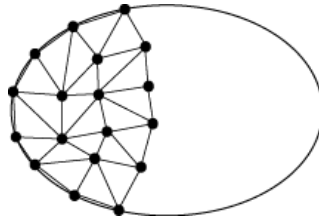


図 10・4 解析領域の要素分割²⁾

いま、要素内に n 個の接点を配置し、要素内節点 i における f の値を $f_i^{(e)}$ とすると、式(10・28)を

$$f = N_1 f_1^{(e)} + N_2 f_2^{(e)} + \cdots + N_n f_n^{(e)} \quad (10 \cdot 37)$$

のようにして書き直すことができる。ここで、 $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$ は既知の関数で形状関数と呼ばれる。このように有限要素法^{1), 3)}では、節点における f の値を未知量として展開する。よって、要素ごとに得られた離散方程式を節点のところで接続していくことで、系全体に対する離散方程式 (全体方程式) を組み立てる。

個々の要素に対する離散化方程式 (要素方程式) から系全体の離散方程式 (全体方程式) が得られる保証は、形状関数が適合性の条件と完全性の条件を満たすことが必要になる。すなわち、前者は、要素境界にて、未知関数 f 及び汎関数に現れる最高階の導関数よりも一次低い次数までの導関数が連続であること。後者は要素内において未知関数 f 及び汎関数に現れる最高階の導関数が一定値を含んだ形であることである。

有限要素法では、一般に多項式が用いられ、最も基本的な要素は一次多項式を用いたもので基本要素と呼ばれる。更に高次の多項式を用いた要素は高次要素と呼ばれる。

また、有限要素法は、有限な領域を解析対象とするが、アンテナのような開領域を扱う問題の場合は、解析領域を仮想的な無反射境界で閉じておく必要がある。この条件を吸収境界条件といい、例えば文献 4) のような異方性完全整合層が知られている。

■参考文献

- 1) 小柴正則, “光・波動のための有限要素法の基礎,” 森北出版, 1990.
- 2) 電子情報通信学会(編), “アンテナ工学ハンドブック(第2版),” オーム社, 2008.
- 3) J. Jin, “Finite Element Method in Electromagnetics(2nd. Ed.),” Wiley, 2002.
- 4) F. L. Teixeira and W. C. Chew, “General closed-form PML constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media,” IEEE Microwave Guided Wave. Lett., vol.8, pp.223-225, Jun. 1998.

■4群 - 2編 - 10章

10-5 FDTD 法 (時間領域差分法)

(執筆著者：福迫 武) [2010年5月 受領]

10-5-1 基本概念

FDTD (Finite Difference Time Domain) 法は、マクスウェル方程式の時間的及び空間的差分近似に基礎をおき、時間領域の解析が行われる。そのアルゴリズムは単純で、実用的な計算精度を得やすい。FDTD 法では、空間における電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} に関するマクスウェル方程式

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (10 \cdot 38)$$

の差分近似として、一次の中心差分が用いられる。電磁界のある一つの成分を $F(\mathbf{r}, t) = F(x, y, z, t)$ としたとき、差分近似により $F(x, y, z, t) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ のように離散化されて、これを $F^n(i, j, k)$ のように表現するが、解析空間は図 10・5 のように微小直方体に分割して考える。この微小直方体をセルといい、直方体の辺をセルエッジという。また、セルの辺の長さ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ をセルサイズという。

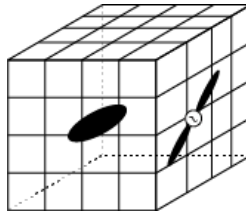


図 10・5 解析空間と FDTD セル

FDTD 法の基本は Yee アルゴリズムにある。式(10・38)の左辺を、電界 \mathbf{E} については $t = (n - 1/2) \Delta t$ 、磁界 \mathbf{H} に関しては $t = n\Delta t$ の時刻で差分し、 $\sigma \mathbf{E}^{n-1/2} = \sigma (\mathbf{E}^{n-1} + \mathbf{E}^n) / 2$ で近似すると次を得る。

$$\mathbf{E}^n = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \frac{1}{1 + \frac{\sigma \Delta t}{2\epsilon}} \nabla \times \mathbf{H}^{n-1/2} \quad (10 \cdot 39)$$

$$\mathbf{H}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n \quad (10 \cdot 40)$$

このように FDTD 法では、 $i = (n-1) \Delta t$ の電界 \mathbf{E}^{n-1} と $t = (n-1/2) \Delta t$ の磁界 $\mathbf{H}^{n-1/2}$ から $\Delta t / 2$ 時間後の電界 \mathbf{E}^n が計算され、更にこの電界 \mathbf{E}^n と磁界 $\mathbf{H}^{n-1/2}$ から磁界 $\mathbf{H}^{n+1/2}$ が計算される。よって、図 10・6 のような時間軸上の配置となり、電界は $(n-1) \Delta t, n\Delta t$ と整数次の時刻に割り当てられ、磁界は $(n-1/2) \Delta t, (n+1/2) \Delta t$ と半奇数次の時刻に割り当てられる。なお、磁性体の場合など、電界と磁界の順番を逆にすることも可能である。

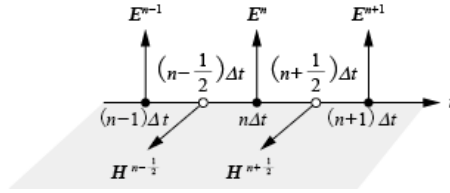


図 10・6 電磁界の時間配置

電磁界は空間的配置を考える必要があるが、図 10・5 のセルエッジには、電界または磁界を割り当てられるが、電界である場合が多い。図 10・7 はその一部を取り出したものであるが、 x - y の面に平行なセルエッジの一つを C_E とする。このとき、セルエッジ上の点 Q_x^+ における電界 $E_x(Q_x^+)$ と $H_z(P_z^-)$ は $\nabla \times$ の定義を用いて次のように表される。

$$E_x^n(Q_x^+) = \frac{1 - \frac{\sigma(Q_x^+) \Delta t}{2\epsilon(Q_x^+)}}{1 + \frac{\sigma(Q_x^+) \Delta t}{2\epsilon(Q_x^+)}} E_x^{n-1}(Q_x^+) + \frac{\Delta t}{1 + \frac{\sigma(Q_x^+) \Delta t}{2\epsilon(Q_x^+)}} \left\{ -\frac{H_y^{n-1/2}(Q_y^+) - H_y^{n-1/2}(Q_y^-)}{\Delta z} + \frac{H_z^{n-1/2}(P_z^+) - H_z^{n-1/2}(P_z^-)}{\Delta y} \right\} \quad (10 \cdot 41)$$

$$H_z^{n+1/2}(P_z^-) = H_z^{n-1/2}(P_z^-) - \frac{\Delta t}{\mu(P_z^-)} \left\{ -\frac{E_x^n(Q_x^+) - E_x^n(Q_x^-)}{\Delta y} + \frac{E_y^n(Q_y^+) - E_y^n(Q_y^-)}{\Delta x} \right\} \quad (10 \cdot 42)$$

実際には、解析空間の位置について $Q_x^+ = (i + 1/2, j, k)$ 、 $Q_x^- = (i + 1/2, j - 1, k)$ 、 $P_z^- = (i + 1/2, j - 1/2, k)$ などとすれば計算式が具体的に得られる^{2),3)}。具体的なプログラムは文献 3), 4) にある。

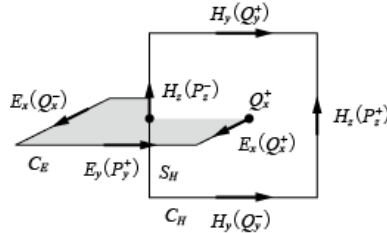


図 10・7 セルエッジ上の電磁界

解析モデルを与えるには、電界セルエッジに誘電率と導電率、磁界セルエッジに透磁率を与えればよいが、滑らかな表面は階段近似をすることになる。また、金属のように導電率 σ が極めて大きい物体の場合は、丸め誤差が問題となるが、完全導体なら電界の接線成分を 0 とすればよい。また、表面インピーダンス法を用いることもできる³⁾。

セルサイズに関しては、一般に波長の 1/10 程度以下にすればよいとされているが、更に細かくする必要な場合も多い。また、セルサイズと時間ステップ間には

$$v\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (10 \cdot 43)$$

で示されるクーランの安定条件を満たす必要がある。なお、 v は媒質中の位相速度である。セルサイズの決定の際、導体エッジ近傍など、急峻に電磁界が変化すると予想されるところは、直方体のセルサイズを局所的に変える不均一セルを用いることもできるが、あまり急峻に変えると誤差が大きくなることが知られている。

10-5-2 励振法と励振パルス

電磁波の散乱問題では平面による散乱を扱うことが多いが、アンテナの場合、給電部に局所的に印加された電圧を励振される問題を扱うことが多い。例えば、ダイポールアンテナでは、給電間隔を d とした時の電界を $E_z^a(Q, t) = V_0 p(n\Delta t)/d$ によって与えるデルタギャップ給電がよく用いられる。なお、最もよく使われる $p(n\Delta t)$ は、広帯域な周波数スペクトルをもつガウスパルスである。直流が問題となる場合には、奇数回微分したガウスパルスが用いられる。また、マイクロストリップ線路で給電される場合は、線路の幅方向に数セル配置し、幅方向に一樣な電界を与えることが多い。

10-5-3 吸収境界

FDTD は有限要素法と同様で閉領域の解法であるが、アンテナのように開領域が必要な場合は、解析領域を吸収境界条件で囲むことになる。よく知られている中で最も簡単なものは、吸収境界で反射がないという近似的微分方程式から求められた Mur の吸収境界条件²⁾⁻⁴⁾である。また、Berenger の PML 吸収境界条件^{2),3),5)} は最も精度が良いことで知られており、多くのメモリを必要とする一方で、よく使用されている。

■参考文献

- 1) 電子情報通信学会(編), “アンテナ工学ハンドブック(第2版),” オーム社, 2008.
- 2) A. Taflov, “Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain method (3rd edition),” Artech House, 2005.
- 3) 宇野 亨, “FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析,” コロナ社, 1998.
- 4) K. S. Kunz and R. J. Luebbers, “The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics,” CRC Press, 1999.
- 5) J. P. Berenger, “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves,” Journal of Computational Physics, vol.114, no.1, pp.185-200, 1994.