■12 群（電子情報通信基礎）－ 1 編（解析学・代数学）

5 章 複素関数論

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

■概要■

正則関数の理論（複素解析関数論）は，関数解析学，偏微分方程式論，確率論，フーリエ解析，整数論，複素多様体論，理論物理学，流体力学，信号処理など非常に多くの分野で応用されている．カオスーフラクタルに関連して，複素力学系の理論の進歩も著しい．

正則関数の理論は，大きく分けると 1 変数正則関数論と多変数正則関数論に分ける事ができる．多変数正則関数の理論は，1930 年当時，未解決であったレビ（Levi）の問題，クザン（Cousin）の問題，近似の問題，すべてを解いたわが国の数学者，**岡潔**の貢献により大きく進歩した．その後，層の理論，コホモロジーの理論と結びついて更に大きく進歩している．

ヒルベルト（Hilbert）空間を作る正則関数の理論には，ハーディー（Hardy）空間，バーグマンーフォック（Bargmann - Fock）空間，ベルグマン（Bergmann）核関数の理論（再生核の理論）などがある．信号処理の分野では帯域制限された関数の作るペーリーウイナー（Paley - Wiener）空間が重要である．コーシーリーマン（Cauchy-Riemann）作用素に注目して 1960 年代にスエーデンのヘルマンダー（Lars Hörmander）は，ヒルベルト 空間論を援用し，L^2 評価に基ずく多変数正則関数論を作りあげた．

多変数正則関数の理論は，佐藤超関数の理論，複素多様体論などの純粋数学以外でも，場の量子論，解析的散乱行列理論，複素角運動量理論（レッジェ極理論）などの素粒子論などの分野で応用されている．1 変数の正則関数の拡張については，多変数正則関数論の他にも，変数及び，関数の値をハミルトンの 4 元数，更に一般化してクリフォード代数変数を基にした理論がベルギー，チェコの研究グループを中心とするヨーロッパのグループで盛んに研究されている．コーシーリーマン作用素の代わりにディラック作用素を用いる．変数の数が無限個の正則関数論というのもある．ここでは主に 1 変数の正則関数について解説する．

【本章の構成】

本章では，正則関数とコーシーリーマン方程式（5-2 節），正則関数の例（5-3 節），コーシーの積分定理（5-4 節），コーシーの積分公式（5-5 節），テイラー展開（5-6 節），ローラン展開と留数定理（5-7 節），等角写像（5-8 節），ヒルベルト変換（5-9 節），解析接続と一致の定理（5-10 節)、複素フーリエ変換（帯域正弦関数とペーリーウイナーの定理）（5-11 節), 解析信号（5-12 節）について述べる．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-1 正則関数とコーシーリーマン方程式

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

$x+iy$,（$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$）という形の数を複素数と呼ぶ．i は**虚数単位**と呼ばれる．x, y は，実部，虚部と呼ばれる．$x+iy$ を 2 次元平面の点 (x,y) に対応させる．**複素平面**と呼ぶ．ガウス（Gauss）平面，アルガン（Argand）平面と呼ばれる事もある．複素平面に仮想的に無限遠点を付け加え，立体射影する事により，半径 1 の 2 次元球面と 1 対 1 に対応する．無限遠点は，例えば北極に対応する．

$z=x+iy$ に対し，$\bar{z}=x-iy$ を z の共役複素数と呼ぶ．$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ が成立する．また，原点から z への距離を $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ と書き，複素数 z の**絶対値**と呼ぶ．z が x 軸の正の部分となす角を複素数 z の**偏角**と呼び，$\arg(z)$ と表す．$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の変数 x の部分に形式的に虚変数 ix を代入し，三角関数 $\cos x$, $\sin x$ のテイラー（Taylor）展開

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

と比較すると，**オイラー（Euler）の公式** $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を得る．例えば，$e^{\frac{\pi i}{4}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ である．

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \text{を得る．}$$

$r=|z|$, $\theta=\arg(z)$ とおくと，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が成立する．これを複素数 z の**極形式**と呼ぶ．オイラーの公式を使うと $z=re^{i\theta}$ と表示できる．$|1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ であるので，$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ である．

ド モワブル（De Moivre）の公式

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$,（$n\in\mathbb{Z}$）が成立する．

例えば，$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ を部分分数分解 $\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{-1}{2i}\left(\dfrac{1}{x+i}-\dfrac{1}{x-i}\right)$ を用いて行うと，

$$\frac{-1}{2i}\left[\log(x+i)-\log(x-i)\right]_0^1$$

と必然的に複素対数関数，複素変数関数の積分計算に遭遇する．$f(z)=u(x,y)+iv(x.y)$ を複素平面の領域 D で定義された複素数値関数とする．

領域の点 a で $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する時，$f(z)$ は，$z=a$ で微分可能であるといわれる．

$z=a$ の近くのすべての点で微分できる時，関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x.y)$ は $z=a$ で**正則（holomorphic）**であるといわれる．

領域の各点 z で導関数 $\dfrac{df(z)}{dz} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ が存在する時，言い換えると領域のすべての点で複素変数 z について微分できる時，関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x.y)$ は D 上の正則関数（holomorphic function）である．

微分可能性の条件は，一見平凡な条件に見えるが，実は大変強い条件である．

$f(z)$ の実部 $u(x,y)$，虚部 $v(x.y)$ は，次の連立偏微分方程式（**コーシーリーマン**方程式）を満たす．

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

ここで u_x，u_y は，それぞれ関数 $u(x,y)$ の x についての偏微分 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$y$ についての偏微分 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を表す．v_x，v_y についても同様である．

コーシーリーマン作用素 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ を使うと正則関数であるための条件は，$\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 0$ となる．直観的には，$f(z)$ は z のみの関数であり，変数 $\overline{z}$ を含まないということである．

例 1． $f(z) = z^2$ の場合，$u(x,y) = x^2 - y^2$，$v(x,y) = 2xy$ であり，$u_x = 2x$，$v_y = 2x$，$u_y = -2y$，$v_x = 2y$ であり，$u(x,y)$，$v(x,y)$ は，コーシーリーマン方程式を満たす．$\dfrac{\partial z^2}{\partial \overline{z}} = 0$，$\dfrac{\partial z^2}{\partial z} = 2z$ である．

例 2． $f(z) = |z|^2$ は $\dfrac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial z\overline{z}}{\partial \overline{z}} = z$ であるので $z = 0$ では微分可能であるが，$z = 0$ において正則ではない．

例 3． $f(z) = \overline{z}\, u(x,y) = x$，$v(x.y) = -y$ であり $u_x = 1$，$v_y = -1$，$u_y = 0$，$v_x = 0$ であり，コーシーリーマン方程式を満たさない．従って，$f(z) = \overline{z}$ を z について微分することはできない．

$\Delta u(x,y) = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ とおくと，正則関数の実部 $u(x,y)$ 虚部 $v(x,y)$ は，ラプラス方程式 $\Delta u(x,y) = 0$，$\Delta v(x,y) = 0$ を満たすので，調和関数である．

逆に，調和関数が与えられるとそれを実部に持つ正則関数が構成できる．例えば，z^2 は，実部として，$u(x,y) = x^2 - y^2$ を持つ．$\Delta(x^2 - y^2) = 0$ である．しかし，$\Delta(x^2 + y^2) = 4 \neq 0$ であるので $x^2 + y^2$ は調和関数でない．従って，$x^2 + y^2$ を実部に持つ正則関数は存在しない．コーシーリーマン方程式を満たす二つの関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ は，互いに共役な調和関数と呼ばれる．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-2 正則関数の例

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

$$z^n,\ (n \in \mathbb{N})$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),\ (z = x + iy)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ (z = x + iy)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ (z = x + iy)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ (z = x + iy)$$

$$\log z = \log |z| + i \arg(z)$$

$$\sqrt{z} = \exp(1/2 \log z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2},\ (z = re^{i\theta})$$

$\log z$, $\sqrt{z}$ は多価関数であり，1 価正則関数にするために，偏角の範囲に制限をつける．通常，$-\pi \leq \arg(z) < \pi$，あるいは，$0 \leq \arg(z) < 2\pi$ という制限がつく事が多い．$-\pi \leq \arg(z) < \pi$ の場合，主値，主枝と呼ばれる．

i は $i^2 = -1$ を満たし，虚数単位である．虚数単位を表すのに，数学，物理学では i を使うが電気関係の分野では j を用いる事も多い．三角関数 $\cos x$ は実軸上では絶対値が 1 を超えないが，虚軸上では $\cos(iy) = \cosh y$ であり，$\lim_{|y|\to\infty} \cos(iy) = \lim_{|y|\to\infty} \cosh y = +\infty$ である．複素平面においては，$\cos z$ はもはや有界な関数ではない．

また，方程式の解の個数も増える．例えば $e^z = 1$ の解は，$2\pi in$，$(n \in \mathbb{Z})$ であり，無限個ある．実数の範囲では，$e^x = 1$ の解は，一点ゼロのみである．注意すべき点である．多価関数を一価正則関数にする方法としてはリーマン面を考える方法もある．$\sqrt{z}$ のリーマン面は 2 次元球面と位相同型であり，$\sqrt{z(z-1)(z-2)}$ のリーマン面はトーラス（輪環面）と位相同型である．数理物理，工学に現れる多くの特殊関数は正則関数である．例えば，ベータ関数

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

は，p，q の実部が正である領域上の 2 変数正則関数である．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-3 コーシーの積分定理

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

複素平面上の向きを持つ曲線 C の媒介変数表示を $z = z(t)$,（$a \leq t \leq b$）とする．C に沿っての複素積分 $\int_C f(z)dz$ を

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt,\ (a \leq t \leq b)$$

で定義する．例えば,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=1}(z-a)^{-1}dz = 1, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=1}(z-a)^n dz = 0,\ (n \neq -1)$$

である．

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

ここで $-C$ は，C と向きが反対の曲線を表す．

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

が成り立つ．

C が，閉曲線であると，**コーシーの積分定理**

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成立する．正則関数の理論で最も重要な定理である．

証明はベクトル解析におけるグリーンの定理と上述のコーシーリーマン方程式を組み合わせると次のようにして分かる．C は，領域 D の境界であるとする．i.e. $C = \partial D$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)d(x+iy)$$

$$= \int_{\partial D}(udx - vdy) + i\int_{\partial D} vdx + udy$$

$$= -\int\int_D (u_y + v_x)dydx + i\int\int_D (u_x - v_y)dxdy$$

$$= 0$$

これを応用すると信号処理で重要な sinc 関数の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi$$

光の回折現象で登場するフレネー積分

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

の値が分かる．

また，熱方程式の基本解のフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{ix\xi} dx = e^{-t\xi^2}$$

となる．通常は形式的な変数変換で済ますが厳密には複素積分が必要である．

領域 D 上の連続関数 $f(z)$ の D 上の任意の閉曲線での積分がゼロであると原始関数 $F(z) = \int_a^z f(t)dt$ が一意に定まる．従って，$f(z)$ は正則となる．これは，**モレラ（Morera）の定理**と呼ばれている．モレラの定理は，

ラプラス（Laplace）変換

$$\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

メリン（Mellin）変換

$$\int_0^\infty f(t)t^{z-1}dt$$

フーリエ（Fourier）変換

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-izt}dt$$

バーグマン（Bargmann）変換

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2+t^2) + \sqrt{2}z \cdot t\right\} dt$$

など，核関数 $K(z,t)$ が正則パラメーター z を持つ積分変換 $\int_0^\infty f(t)K(z,t)dt$ で定義される関数の正則性を調べるときに有用である．

多変数正則関数に対するコーシーの積分定理の類似物としては，Cauchy - Poincaré（コーシーポアンカレ）の定理が知られている．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-4 コーシーの積分公式

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

次の公式が成立する．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a)$$

ここで C は，正の向きを持つ閉曲線であり，a は C の内部の点である．**コーシーの積分公式**と呼ばれている．C の内部における関数 $f(z)$ の値が C 上の値のみで決定していることが分かる．特に，C 上での値がゼロであると C の内部のすべての点において恒等的にゼロになる．

この現象は後述する解析接続の一意性に関係する．また，正則関数 $f(z)$ は 1 回微分可能であると無限階微分可能であることが分かる．これは実変数関数にはない大変特別な性質である．

n 次導関数は，以下のように積分で計算できる．

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

特に正則関数列 $\{f_n(z)\}_{=1}^{\infty}$ が，一様収束していると m 階導関数列 $\{\frac{d^m f_n(z)}{dz^m}\}_{n=1}^{\infty}$ も一様収束することが分かる．この事から，正則関数の作る関数空間の位相を関数解析的に扱う際，議論が非常に簡単になる．$f(z)$ を正則関数とするとき，関数 $|f(z)|$ は，必ず最大値を境界で取り，決して内部で最大値を取らない事も分かる．これは “**最大値の原理**” と呼ばれる．積分路として a を中心とする半径 R の円を取り，積分を実行すると

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})d\theta$$

が成り立つ．これは “**平均値の性質**” と呼ばれる．正則関数の実部，虚部が，調和関数である事が反映している．コーシーの積分公式の応用範囲は非常に広い．確率論で登場するコーシー分布の特性関数の計算，ポアソン方程式の基本解の構成で現れる積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|t|}$$

を求める事ができる．次の積分はメリン（Mellin）変換の基本である．計算の際は，被積分関数の多価性に気をつける必要がある．

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi a},\quad (0<a<1)$$

コーシーの積分公式に対しては，いろいろな解釈がある．偏微分方程式論からは，コーシーリーマン作用素の基本解になっているという解釈である．$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}$ は，コーシー核と呼ばれる事もある．

もう一つは，佐藤超関数論からの解釈でディラックのデルタ関数（超関数）の定義関数になっているという解釈である．コーシーの積分公式の多変数化には長い歴史がある．古典的な直積型の公式のほか，ボッホナーマルチネリ（Bochner - Matrtinelli）の公式, アイゼンバーグ（Aizenberg）の公式，コーシーファンタピエ（Cauchy-Fantappié）の公式，ヘンキン（Henkin）の公式などが知られている．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-5 テイラー展開

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

コーシーの積分公式から次のテイラー展開の式が導かれる．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

展開係数は複素積分を用いて以下のように計算できる．

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$f^{(n)}(z)$ は，n 次導関数である．正則関数 $f(z)$ の特異点（正則でない点）の位置と a を中心とするテイラー級数の収束半径が見事に対応する．

収束する範囲は，a から最短の距離にある特異点までの円の内部である．

例 1． $\dfrac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$，（$|z| < 1$）

左辺の関数の原点に最も近い特異点は $z = i, -i$ にある．右辺の冪級数の収束半径は，1 である．特異点（正則でない点）と収束半径がきれいに対応する．

実変数で考えていてはこのような対応はうまくいかない．$\dfrac{1}{1+x^2}$ は実軸上に特異点を持たない．

例 2．（ルジャンドル多項式の母関数展開）

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\theta z+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)z^n,\quad (|z| < 1)$$

$P_n(x)$ は n 次の Legendre（ルジャンドル）多項式である．

左辺の関数の特異点は，$z = e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ を結ぶ単位円周上の弧上にある．右辺の級数の収束半径は，1 である．

例 3． $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$，（$|z| < \infty$）

右辺の級数の収束半径は，∞ である．e^z は，無限大に真性特異点（後述) を持つのみである．e^z, z の多項式のように無限遠点にのみ特異点を持つ（有限の部分に特異点を持たない）関数は，整関数（entire function）と呼ばれる．テイラー展開の式により，正則関数の零点は孤立することが分かる．テイラー展開を応用すると，“有界な整関数は，定数関数である” という**リュウビル（Liouville）の定理**を次のようにして証明できる．

$|f(z)| \leq M,\quad (\forall z \in \mathbb{C})$ と仮定する．$f(z)$ の $z = 0$ におけるテイラー展開を考える．

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

から

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{R^n}$$

が分かる．

$R \to \infty$ とすると，$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$，（$n \geq 1$）

従って，$f(z)$ は定数関数である．これを応用すると “複素数係数の n 次代数方程式は，複素数の範囲で n 個の解を持つ” という代数学の基本定理（ガウスの定理）が証明される．また，2 重周期をもつ整関数は存在しないことも分かる（2 重周期をもつ有理形関数は，存在する）．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-6 ローラン（Laurent）展開と留数定理

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

正則関数の特異点には孤立するものと孤立しないものがある．例えば，主値を持つ対数関数 $\log z$ の特異点 $z = 0$ は，負の実軸上の点はすべて $\log z$ の不連続点（特異点）であるので孤立しない特異点である．$(\sin \frac{2\pi}{z})^{-1}$ の特異点 $z = 0$ も孤立しない特異点である．a を関数 $f(z)$ の孤立特異点とする．a の近くで次の**ローラン展開**が成立する．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)(z-a)^{-n-1} dz$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$$

a_{-1} を**留数**と呼ぶ．$z = a$ における，留数 a_{-1} を $a_{-1} = Res(f, a)$ と表す事もある．複素積分の計算で最も重要な数である．

曲線 C 内の孤立特異点を a_1，a_2，$\cdots$，a_n とすると，コーシーの積分定理により

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k)$$

が成立する（**留数定理**）．

ローラン展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$$

と分けるとき，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ は a の近くで正則な部分を表し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ は，a の近くでの特異性の部分を表す．孤立特異点は関数の $z = a$ の近くでの振る舞いにより，次の三つに分類される．

（1）除去可能特異点（$z = a$ の近くで関数 $f(z)$ は有界）

（2）極（$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$）

（3）真性特異点（$\lim_{z \to a} f(z)$ は不確定）

特異性の部分 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ を用いると

（1）除去可能特異点（$z = a$ の近くで特異性の部分なし）

（2）極（特異性の部分は，有限級数 $\sum_{n=1}^{m} a_{-n} (z-a)^{-n}$，$a_{-m} \neq 0$，m 次の極と呼ばれる）

（3）真性特異点（特異性の部分は，無限級数）

という特徴づけもできる．特異点が極のみである関数は有理形関数（meromorphic function）と呼ばれる．

例 1．（ガンマ関数）

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

は，有理形関数である事が知られている．

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

と分解する．

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

は，z の整関数であり，特異点を持たない．$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ に，$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!}$ を代入して，

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

と展開できる．この事からガンマ関数は右半平面では正則であり，左半平面では $z = -n$ において 1 次の極を持つ事が分かる．$z = -n$ における留数は $\frac{(-1)^n}{n!}$ である．

例 2． $e^{\frac{t}{2}(z-1/z)}$ は $z = 0$ を真性特異点として持ち，次のローラン展開を持つ．

$$e^{\frac{t}{2}(z-1/z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n$$

$J_n(t)$ は n 次の Bessel 関数である．

ローラン展開は，デジタル信号処理では，$Z-$ 変換に対応する．留数の応用として偏角の原理がある．

偏角の原理

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \qquad (N : C \text{ 内の零点の個数} \quad P : C \text{ 内の極の個数})$$

偏角の原理の応用として次のルーシェ（Rouché）の定理が知られている．

ルーシェ（Rouché）の定理

$|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ が閉曲線 C 上成立するとき，C 内の $f(z)$ の零点と $g(z)$ の零点の数は同じである．

これを応用すると $f(z)=a_n z^n, g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ として，代数学の基本定理が証明できる．整関数の零点に関しては次が知られている．

無限乗積表示

n 次の多項式 $P(z)$ は，代数学の基本定理により複素数の範囲で $P(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)$ と因数分解できる．整関数も，一般に因数分解が可能である．ただし，一般に無数のゼロ点を持つので無限乗積が登場する．例を掲げる．

例 3． $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$

ここで，$\gamma=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$ は，オイラー（Euler）数である．

例 4． $\sin\pi z=\pi z\displaystyle\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ これを利用して $\log(\sin\pi z)$ の対数微分を考えると

$$\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\frac{1}{\pi z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)$$

を得る．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-7 等角写像

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

$f(z) = u(x, y) + iv(x.y)$ はコーシーリーマン方程式

$$f(z) = u(x, y) + iv(x.y)$$

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x, \end{cases}$$

を使うと関数行列式が $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = {u_x}^2 + {u_y}^2 > 0$ であるので，平面から平面からへの写像として向きを保つ事が分かる．また，角度を保つ変換でもある．例えば，曲線 $u(x, y) = C_1$ の法線ベクトル (u_x, u_y) と曲線 $v(x, y) = C_2$ の法線ベクトル (v_x, v_y) は，内積がゼロであるので直交している．従って曲線 $u(x, y) = C_1$ と曲線 $v(x, y) = C_2$ は，直交していることが分かる．電磁気学ではそれぞれ電気力線，等電位線に対応している．

$f'(a) \neq 0$ であると $z = a$ の近くで $f(z)$ は，1 対 1 の写像である．もし a が $f(a) = 0$ の n 次の零点であると a の近くで n 対 1 の写像である．例えば，$f(z) = z^3$ は $z = 0$ を 3 次の零点として持つので，$z = 0$ の近くで 3 対 1 の写像である．$w = e^z$ は，$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ への無限対 1 の写像である．上半平面は，$w = \sqrt{z}$ により，第一象限に写像される．

例 1．（ジューコフスキー（Joukowski）変換）

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

は ジューコフスキー変換と呼ばれる．原点を中心とする円は，$(1, 0)$, $(-1, 0)$ を焦点にもつ楕円に写像される．特に，単位円は線分 $[-1, 1]$ に写像される．原点から出る半直線は，$(1, 0)$, $(-1, 0)$ を焦点にもつ双曲線に写像される．流体力学などで重要である．1 次分数変換（別名メービウス（Möbius）変換）$\dfrac{az + b}{cz + d}$ がある．

1 次分数変換全体は，合成に関して群を作る．上半平面を上半平面に写す等角写像，円を円に写す等角写像はこれに限られる．

全複素平面を有界な領域に等角写像することはできない．そのような正則関数は，リュービルの定理により，定数関数のみである．従って実現はできない．リーマンの写像定理によれば，すべての単連結領域は，単位円に等角写像される．実軸を多角形に等角写像する関数は，シュワルツークリストフェル（Schwartz-Christoffel）変換と呼ばれている．

等角写像は，偏微分方程式論のグリーン関数の理論，再生核の理論に関連して研究されている．円環領域 $D_{R,r} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ を考える．D_{R_1,r_1}, と D_{R_2,r_2} は常に位相同型であるが，正則同型（正則関数で一対一に写りあう）であるための必要十分条件は $\dfrac{r_1}{R_1} = \dfrac{r_2}{R_2}$ である．

複素力学系では擬等角写像の研究がさかんである．なお，高次元の場合にも，位相同形であるが正則同形でない例が存在する．例えば，$D_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ と $D_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ である．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-8 ヒルベルト変換

（執筆者：吉野邦生）［2009 年 1 月 受領］

関数 $F(t)$ と $\dfrac{1}{t}$ の畳み込みをヒルベルト（Hilbert）変換と呼ぶ．コーシー（Cauchy）変換，スチェルス（Stieltjes）変換と呼ばれる事もある．

$$H(F)(z) = \int_a^b \frac{F(t)}{t-z}dt$$

$H(F)(z)$ は，$\mathbb{C}\backslash[a,b]$ で正則な関数になる．

$a = -\infty, b = \infty$ の場合には，$H(F)(z)$ は，$\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ で正則な関数になる．次の再現公式（境界値表示）が成立する．

境界値表示

$$H(F)(t+i0) - H(F)(t-i0) = 2\pi i F(t)$$

例 1．（n 次のルジャンドル多項式のヒルベルト変換）

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{t-z}dt$$

$Q_n(z)$ は，第二種のルジャンドル関数である．

$$Q_n(t+i0) - Q_n(t-i0) = -\pi i P_n(t)$$

ノイマン（Neumann）の公式と呼ばれている．

上半平面で正則な関数 $f(z)$ が条件 $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ を満たしていると，コーシーの積分定理により，

$$\Re f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im f(t)}{t-x}dt$$

$$\Im f(x) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re f(t)}{t-x}dt$$

が成り立つ．

$F(t)$ を実信号とすると，そのフーリエ変換 $\hat{F}(\xi)$ は，$\hat{F}(-\xi) = \overline{\hat{F}(\xi)}$ を満たす．$\int_0^\infty \hat{F}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ は $\int_0^\infty \hat{F}(\xi)e^{i(x+iy)\xi}d\xi$ とおくと，上半平面 $y > 0$ で正則となる．その実部，虚部をそれぞれ $u(x)$，$v(x)$ と置くと

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x}dt$$

$$v(x) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)}{t-x}dt$$

を満たす．この種の積分表示式は，物理学では分散関係式（Dispersion relation）と呼ばれている．ヒルベルト変換, ラプラス変換，フーリエ変換の間の関係は次のようになる．

ラプラス変換＋フーリエ変換　＝ヒルベルト変換

逆フーリエ変換＋逆ラプラス変換（ボレル変換）　＝　正則関数の境界値

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-9 解析接続と一致の定理

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

狭い領域で定義されていた正則関数が，より広い領域に定義域が広がるという現象が起きることがある．例えば，階乗概念の拡張であるガンマ関数 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ は関数等式 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を満たすので，$\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ により，右半平面 $\Re z > 0$ から全複素平面に有理形関数（特異点が極のみの関数）として接続できる．

一般には，接続の方法により，多価関数になることもある．領域が単連結であると多価関数にはならず，一価正則関数になる．これらの性質を**解析接続の一意性**と呼ぶ．

実軸上で実数を取る上半面上の領域で定義された正則関数 $f(z)$ は，関数等式 $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ を満たす下半平面の領域上の正則関数に解析接続できるという**シュワルツの鏡像原理**も有名である．この他にも "領域 D 上の関数 $f(z)$ が実軸上の線分 I を除いて正則で I をこめて連続であると D 全体で正則になる" **パンルベ（Painleve）の定理**というのも知られている．

次元が高い時はボゴリューボフ（Bogolyubov）の**楔の刃の定理** が場の量子論で応用されている．正則関数のゼロ点は孤立するので，二つの正則関数が，定義されている領域の部分領域，あるいは曲線上で等しいと定義域全体で等しくなる．**一致の定理**と呼ぶ．

特に正則関数が定義されている領域の部分領域，あるいは曲線上ゼロであると恒等的にゼロになる．この性質は，関数等式などを示す場合には，大変便利な性質であるが，量子力学，時間周波数解析では "元の空間とフーリエ空間との両方で信号を局在化することはできない" というある種の不確定性原理の原因にもなる．離散数列上の一致の定理としては，次のカールソンの定理がある．

カールソンの定理

Carlson の定理　$f(z)$ は次の条件を満たすとする．

（1）$f(x+iy)$ は右半平面 $x > 0$ で正則

（2）$|f(x+iy)| \leq Ce^{ax+b|y|}$，（$x+iy \in \mathbb{C}$，$x > 0$）

（3）$f(m) = 0$　　（$m = 1, 2, 3, \cdots$）

もし $0 \leq b < \pi$ であると，$f(z)$ は恒等的にゼロである．

$\sin \pi z$ は，条件（1），（2），（3）をすべて満たすが，恒等的にゼロではない．従って，π は最良の定数である．π は，標本化定理におけるエイリアジング（Aliasing）に関係して出てくるナイキスト周波数に対応する．カールソンの定理は，量子統計力学，素粒子論，信号処理で重要である．

1 変数正則関数論と多変数正則関数論の決定的な差は，解析接続において現れる．1 変数の場合は，任意の領域を自然境界に持つ関数（定義された領域から 1 歩も外には解析接続できない関数）が必ず存在する．

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$，（$|z| < 1$）は，単位円板 $|z| < 1$ から 1 歩も外には解析接続できない．しかし，2 変数以上の場合は，考えている領域の関数が真に大きい領域にいっせいに解析接続されるということが起こる．**ハルトグス（Hartogs）現象**と呼ばれる．

例 1． $D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < 4\}$ とおく．

D 上の正則関数はすべて $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 4\}$ 上の正則関数に解析接続される．管状領域 $\mathbb{R}^n + iV$ 上のすべての正則関数は，$\mathbb{R}^n + iV$ を含む最小の凸集合に解析接続されるという**ボッホナー（Bochner）の定理**が知られている．

この種の正則包の具体的な決定の問題は，公理論的な場の量子論との関係で詳しく研究されている．

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-10 複素フーリエ変換（帯域制限関数とペーリーウイナー（Paley - Wiener） の定理）

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ を満たす関数を二乗可積分関数と呼ぶ．二乗可積分関数のフーリエ変換は，実軸上二乗可積分な関数になる．更に，フーリエ変換は，プランシェルの定理により，内積を保つ等距離作用素となる．考えている関数の台がある有界な範囲に限られ場合には，そのフーリエ変換は複素正則関数になる．

ペーリーウイナー（Paley - Wiener）の定理

有界な台を持つ二乗可積分関数のフーリエ（Fourier）変換は，実軸上二乗可積分な指数型整関数になる．逆に，実軸上二乗可積分な指数型整関数は，有界な台を持つ二乗可積分関数のフーリエ変換である．台の幅は，指数と一致する．

このような整関数全体は，ペーリーウイナー空間と呼ばれる．

例 1．（ホイッタッカー（Whittaker）の積分表示式）

$$j_n(z) = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^{1} e^{-izt} P_n(t) dt$$

$P_n(t)$ は，n 次の Legendre（ルジャンドル）多項式であり，$j_n(z)$ は，球ベッセル関数である．

例 2．（sinc 関数の積分表示）

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} \chi_{[-1,1]}(t) dt$$

$\chi_{[-1,1]}(t)$ は，区間 $[-1,1]$ の特性関数である．ペーリーウイナー（Paley - Wiener）の定理とフーリエ級数展開を組み合わせると，

シャノン－染谷の標本化定理

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(n) \sin \pi(z-n)}{\pi(z-n)}$$

を得る．証明の概略を述べる．まず，ペーリーウイナー の定理により，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{izt} dt$$

を満たす $[-\pi, \pi]$ 上の二乗可積分関数 $F(t)$ が存在する．

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{izt} dt$$

に $F(t)$ のフーリエ展開

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \qquad \left(a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt = f(n)\right)$$

を代入すると,

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-int}e^{izt}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{f(n)\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)}$$

■12 群 - 1 編 - 5 章

5-11 解析信号

（執筆者：吉野邦生）[2009 年 1 月 受領]

$g(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{i}{2\pi}(f * \frac{1}{x})(t)$ のフーリエ変換は，$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)H(\xi)$. ここで $H(\xi)$ は，ヘビサイド関数である．従って $\hat{g}(\xi)$ は，負の実軸上でゼロとなる．逆フーリエ変換を考えると

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{it\xi}d\xi$$

このため，$g(t)$ は上半平面で正則な関数

$$g(t+iy) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{i(t+iy)\xi}d\xi$$

に解析接続され，$g(t+iy)$ は $\sup_{y>0}\int_{-\infty}^\infty |g(t+iy)|^2dt < \infty$ を満たす（このような正則関数全体はハーディー空間と呼ばれる）．

$g(t)$ は，上半平面からの境界値 $\lim_{y\to 0} g(t+iy) = g(t+i0)$ として表示される．このことから $g(t)$ は解析信号と呼ばれる．

例 1.

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{i}{2\pi}(f * \frac{1}{x})(t)$$

$$= \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t) + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\chi_{[-1,1]}(x)}{t-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t) + \frac{i}{2\pi}\log\left(\frac{1+t}{t-1}\right)$$

$$\hat{f}(\xi) = 2\frac{\sin\xi}{\xi}$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}e^{it\xi}d\xi$$

$$g(t+iy) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}e^{i(t+iy)\xi}d\xi$$