■12 群（電子情報通信基礎）－ 3 編（統計・確率）

8 章　統計的推測の実際

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

■概要■

統計的推測について，実際の場面で使われる方法論を，**区間推定**と**仮説検定**の 2 つの立場から解説する．区間推定と仮説検定は密接な関係があり，両側検定の受容域が信頼区間に対応するので，統計的推測の良さの基準も相互に適応され得る．そこで，本章では，仮説検定については，特に片側検定の方法論を解説する．

母集団分布の平均について，区間推定と検定を与えて，統計的な良さを解説する．平均に関する推測の方法論と本質を同じにして，比率に関する区間推定と検定を導く．更には，比率に関する推測の応用として，適合度の検定や，独立性の検定を捉える．本章では，統計的推測の基礎理論が，実際の場面における各種の推測目的に沿った形式で，如何に方法論を構築していくかを解説する．

【本章の構成】

本章では，平均の区間推定（8-1 節），平均の検定（8-2 節），比率の区間推定（8-3 節），比率の検定（8-4 節），適合度の検定（8-5 節），独立性の検定（8-6 節）に関して，基礎理論と各種解析の設計方法及び具体的例について述べる．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-1 平均の区間推定

（interval estimation for the mean）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

正規（母集団）分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を $X_1, \cdots, X_n$ とする．平均 μ の区間推定を考える．平均 μ の点推定は標本平均 $\hat{\mu} = \bar{X}$ で与えられ，これは $N(\mu, \sigma^2/n)$ に従う．$T(\bar{X}, \mu) = \sqrt{n/\sigma^2}(\bar{X} - \mu)$ とおくと，この分布は $N(0,1)$ になり μ に無関係であるから，$T(\bar{X}, \mu)$ は枢軸量になる．そこで，任意の α $(0 < \alpha < 1)$ について，$N(0,1)$ の上側 $100(\alpha/2)$%点 $u_{\alpha/2}$ を用いれば

$$P_T^{\mu}\{-u_{\alpha/2} \le T(\bar{X}, \mu) \le u_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha \tag{8・1}$$

が主張できる．$N(0,1)$ の分布の対称性と単峰性から，$[-u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2}]$ は確率が $1-\alpha$ となる $T(\bar{X}, \mu)$ を含む区間の中で，区間の幅が最小なものになっている．式 (1·1) から

$$P_{\boldsymbol{X}}^{\mu}\left\{\bar{X} - u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n} \le \mu \le \bar{X} + u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}\right\} = 1 - \alpha \tag{8・2}$$

が成り立つので，もしも σ^2 の値が既知であれば区間 $[\bar{X} - u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n},\ \bar{X} + u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}]$ が信頼係数 $1-\alpha$ の μ **の信頼区間**になる．一般には σ^2 の値は未知であるので，これを不偏分散 $S_0^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n-1)$ で点推定することを考える．$T_0(\bar{X}, S_0^2, \mu) = \sqrt{n/S_0^2}(\bar{X} - \mu)$ とおくと，この分布は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} になり μ に無関係であるから，T_0 は枢軸量になる．そこで，t_{n-1} の上側 $100(\alpha/2)$%点 $t_{\alpha/2}(n-1)$ を用いれば

$$P_{T_0}^{\mu}\{-t_{\alpha/2}(n-1) \le T_0(\bar{X}, S_0^2, \mu) \le t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1 - \alpha \tag{8・3}$$

が主張できる．$[-t_{\alpha/2}(n-1), t_{\alpha/2}(n-1)]$ は，確率が $1-\alpha$ となる $T_0(\bar{X}, S_0^2, \mu)$ を含む区間の中で区間の幅が最小なものになっている．式 (1·3) から

$$P_{\boldsymbol{X}}^{\mu}\left\{\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{S_0^2/n} \le \mu \le \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{S_0^2/n}\right\} = 1 - \alpha \tag{8・4}$$

が成り立つので，区間 $[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{S_0^2/n},\ \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{S_0^2/n}]$ が信頼係数 $1-\alpha$ の μ **の信頼区間**（confidence interval）になる．

母集団分布が正規分布でなくても，**大標本の場合**，すなわち n がある程度大きい場合であれば，近似的に μ の区間推定を構成することができる．中心極限定理によって $T = \sqrt{n/\sigma^2}(\bar{X} - \mu)$ は漸近的に $N(0,1)$ に従う．それゆえ，σ^2 の値が既知であれば，区間 $[\bar{X} - u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n},\ \bar{X} + u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}]$ が漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の μ **の信頼区間**になる．一方，σ^2 の値が未知であっても，中心極限定理によって $T_0 = \sqrt{n/S_0^2}(\bar{X} - \mu)$ が漸近的に $N(0,1)$ に従う．それゆえ，区間 $[\bar{X} - u_{\alpha/2}\sqrt{S_0^2/n},\ \bar{X} + u_{\alpha/2}\sqrt{S_0^2/n}]$ が漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の μ **の信頼区間**になる．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-2 平均の検定

（tests for the mean）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

正規（母集団）分布$N(\mu,\sigma^2)$ の平均 μ に関して，$H:\mu=\mu_0$, $K:\mu>\mu_0$ について有意水準 α の仮説検定（これを**片側検定**（one-sided test）という）を考える．無作為標本を $X_1,\cdots,X_n$ とする．平均 μ の点推定は標本平均 $\hat{\mu}=\bar{X}$ で与えられ，これは H の下で $N(\mu_0,\sigma^2/n)$ に従う．そのとき，統計量 $Z=\sqrt{n/\sigma^2}(\bar{X}-\mu_0)$ は $N(0,1)$ に従う．この分布は μ_0 にも無関係であることに注意する．対立仮説が $K:\mu>\mu_0$ であるから，Z に基づく棄却域として (a,∞) の形の区間をとる．有意水準が α であるから，a の値は $N(0,1)$ の上側 100α%点 u_α として定まる．したがって，もしも σ^2 の値が既知であれば，無作為標本の実現値 $x_1,\cdots,x_n$ から算出される $\bar{x}=(1/n)\sum_{i=1}^n x_i$ に基づいて

$$\begin{aligned}&\bar{x}>\mu_0+u_\alpha\sqrt{\sigma^2/n} \quad ならば\ H\ を棄却,\\ &\bar{x}\le\mu_0+u_\alpha\sqrt{\sigma^2/n} \quad ならば\ H\ を受容\end{aligned} \tag{8・1}$$

という検定を行う．ここで，確率

$$P\Big\{Z>\sqrt{n/\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)\Big\}=1-\Phi\Big(\sqrt{n/\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)\Big) \tag{8・2}$$

の値を p **値**（p-value）という．一方，K のもとで，ある $\mu\ (>\mu_0)$ について**検出力**（power）は

$$\gamma(\mu)=\Phi\Big(-u_\alpha-\sqrt{n/\sigma^2}(\mu_0-\mu)\Big) \tag{8・3}$$

になる．式 (2·1) で与えられる検定は，水準 α の検定のなかで検出力を μ に関して一様に最大にする検定（これを**一様最強力検定**（uniformly most powerful test）という）になる．

一般には σ^2 の値は未知であるので，これを不偏分散 $S_0^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$ で点推定することで棄却域を定めることを考える．統計量 $T_n=\sqrt{n/S_0^2}(\bar{X}-\mu_0)$ の分布は，H のもとで自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従い μ_0 に無関係になる．T_n に基づく棄却域として $(t_\alpha(n-1),\infty)$ の区間をとる．ここで，$t_\alpha(n-1)$ は t_{n-1} の上側 100α%点である．結果的に，無作為標本の実現値 $x_1,\cdots,x_n$ から算出される $\bar{x}$ と $s_0^2=\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ に基づいて

$$\begin{aligned}&\bar{x}>\mu_0+t_\alpha(n-1)\sqrt{s_0^2/n} \quad ならば\ H\ を棄却,\\ &\bar{x}\le\mu_0+t_\alpha(n-1)\sqrt{s_0^2/n} \quad ならば\ H\ を受容\end{aligned} \tag{8・4}$$

という検定を行う．この検定の p **値**は，t_{n-1} の分布関数 G_{n-1} を使って

$$P\Big\{T_n>\sqrt{n/s_0^2}(\bar{x}-\mu_0)\Big\}=1-G_{n-1}\Big(\sqrt{n/s_0^2}(\bar{x}-\mu_0)\Big) \tag{8・5}$$

となる．一方，K のもとで，ある $\mu\ (>\mu_0)$ について**検出力**は

$$\gamma_n(\mu)=G_{n-1}\Big(-t_\alpha(n-1)-\sqrt{n/s_0^2}(\mu_0-\mu)\Big) \tag{8・6}$$

になり，式 (2·4) で与えられる検定が**一様最強力検定**になることが分かる．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-3 比率の区間推定

（interval estimation for a success probability）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

ベルヌーイ分布 Ber(p) からの無作為標本を $X_1, \cdots, X_n$ とする．母数 p（**成功確率**）の区間推定を考える．いま，$X_1, \cdots, X_n$ はいずれも 1 または 0 の値をとる独立な確率変数であるから，標本平均 $\overline{X}$ は $X_1, \cdots, X_n$ のうち 1 をとるものの個数（成功する回数）の割合になり，母数 p の点推定は $\hat{p} = \overline{X}$ で与えられる．標本数 n がある程度大きいとき，中心極限定理によって $\overline{X}$ は漸近的に $N(p, p(1-p)/n)$ に従う．$T(\overline{X}, p) = (\overline{X} - p)/\sqrt{p(1-p)/n}$ とおくと，この分布は漸近的に $N(0, 1)$ になり p に無関係であるから，$T(\overline{X}, p)$ は漸近的に枢軸量になる．そこで，任意の α $(0 < \alpha < 1)$ について，$N(0, 1)$ の上側 $100(\alpha/2)$%点 $u_{\alpha/2}$ を用いれば

$$P_T^p\{-u_{\alpha/2} \le T(\overline{X}, p) \le u_{\alpha/2}\} \approx 1 - \alpha$$

が漸近的に主張できる．しかしながら，このままでは p の信頼限界が定まらない．そこで，$\mathcal{L}((\overline{X} - p)/\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}) \to N(0, 1)$ $(n \to \infty)$ という命題に基づくと，上式に点推定を代入した

$$P_{\overline{X}}^p\left\{-u_{\alpha/2} \le \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \le u_{\alpha/2}\right\} \approx 1 - \alpha \tag{8・1}$$

が漸近的に主張できる．このことから

$$P_{\overline{X}}^p\left\{\hat{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right\} \approx 1 - \alpha \tag{8・2}$$

が漸近的に成り立つので，区間 $[\hat{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},\ \hat{p} + u_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}]$ は漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の p **の信頼区間**になる．なお，p が 0 や 1 に近いときには，上で与えた近似を次のように修正する．母数 p を $\hat{p}$ に替えて $\tilde{p} = (n\overline{X} + 0.5u_{\alpha/2}^2)/(n + u_{\alpha/2}^2)$ で点推定する．このとき，区間 $[\tilde{p} - u_{\alpha/2}\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})/\tilde{n}},\ \tilde{p} + u_{\alpha/2}\sqrt{\tilde{p}(1-\tilde{p})/\tilde{n}}]$ は，漸近的に信頼係数 $1-\alpha$ の p **の信頼区間**になることが知られている．ここで，$\tilde{n} = n + u_{\alpha/2}^2$ である．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-4 比率の検定

（tests for a success probability）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

ベルヌーイ分布 Ber(p)，すなわち 2 項分布 $B(1, p)$ の母数 p ($0 < p < 1$) に関して，$H: p = p_0$，$K: p > p_0$ について有意水準 α の仮説検定を考える．ただし，$0 < p_0 < 1$ とする．無作為標本を $X_1, \cdots, X_n$ とすれば，その和 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は H の下で 2 項分布 $B(n, p_0)$ に従う．対立仮説が $K: p > p_0$ であるから，Y_n に基づく棄却域として $\{k, k+1, ..., n\}$ という形をとればよい．ただし，k は $0 \le k \le n$ を満たすある整数とする．有意水準が α であるから，$P\{Y_n \ge k\} \le \alpha$ となる最小の k を k_0 として，無作為標本の実現値 $x_1, \cdots, x_n$ から算出される $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ に基づいて

$$\begin{aligned} &y_n \in \{k_0, k_0+1, \cdots, n\} \quad \text{ならば } H \text{ を棄却}, \\ &y_n \notin \{k_0, k_0+1, \cdots, n\} \quad \text{ならば } H \text{ を受容} \end{aligned} \tag{8・1}$$

という検定を行う．もしも $P\{Y_n \ge k\} = \alpha$ となる k を求めたければ，検定を確率化すればよい．なお，$H: p = p_0$，$K: p < p_0$ について有意水準 α の仮説検定を考える場合は，$P\{Y_n \le k\} \le \alpha$ となる最大の k を k_0 として，棄却域を $\{0, 1, \cdots, k_0\}$ と定めればよい．

次に，大標本の場合，すなわち n がある程度大きい場合について考える．中心極限定理よって，H のもとで $\bar{X}$ は漸近的に $N(p_0, p_0(1-p_0)/n)$ に従い，統計量 $Z_n = (\bar{X} - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$ の分布は漸近的に $N(0, 1)$ になる．対立仮説 $K: p > p_0$ について有意水準 α の仮説検定は，Z_n に基づく棄却域を (u_α, ∞) と定めたものになる．ここで，u_α は $N(0, 1)$ の上側 100α%点である．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-5 適合度の検定

（tests for goodness-of-fit）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

調査対象が n 人いて，それぞれが k 個のクラスのどれか一つに分類されるとする．各クラスの比率を母数 p_i $(i = 1, \cdots, k)$ で表せば，k 個のクラスに振り分けられる人数 $(X_1, \cdots, X_k)$ は j.p.m.f.

$$f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, \cdots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \tag{8・1}$$

$$(x_i \geq 0 \ (i = 1, \cdots, k), \ \textstyle\sum_{i=1}^k x_i = n)$$

を持つ**多項分布**（multinomial distribution） $M_k(n; p_1, \cdots, p_k)$ に従う．ここで，$k \geq 2$, $0 < p_i < 1$ $(i = 1, \cdots, k)$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ である．いま，母数 p_i $(i = 1, \cdots, k)$ に関して，仮説 $H: p_1 = p_{10}, \cdots, p_k = p_{k0}$ について有意水準 α の検定を考える．例えば $k = 2$ の場合，式 (5·1) で与えられる人数の分布は 2 項分布になる．つまり，一つのクラスに振り分けられる人数 X_1 は 2 項分布 $B(n, p_1)$ に従い，もう一つのクラスに振り分けられる人数の分布は $X_2 = n - X_1$ なる関係式から自ずと決まる．よって，仮説のモデルに X_1, X_2 の実現値が適合するかどうかは，H のもとでの X_1 の分布 $B(n, p_{10})$ において，X_1 の実現値が受容域にあるかどうかで判定できる．中心極限定理から n がある程度大きいとき，$Z = (X_1 - np_{10})/\sqrt{np_{10}p_{20}}$ は漸近的に $N(0, 1)$ に従い，そして Z^2 は漸近的に自由度 1 のカイ 2 乗分布 χ_1^2 に従う．Z^2 の分子は $(X_1 - np_{10})^2 = (p_{10} + p_{20})(X_1 - np_{10})^2 = p_{20}(X_1 - np_{10})^2 + p_{10}(X_2 - np_{20})^2$ となるので，結局，この検定の棄却域（つまりは受容域）は，漸近的に χ_1^2 に従う統計量

$$Z^2 = \frac{(X_1 - np_{10})^2}{np_{10}} + \frac{(X_2 - np_{20})^2}{np_{20}}$$

に基づいて構成すればよいことが分かる．H のもとでの X_1, X_2 の期待値 np_{10}, np_{20} に対して，実現値 x_1, x_2 が外れれば外れるほど Z^2 の実現値も大きくなる．そこで，χ_1^2 分布の上側 100α%点 $\chi_\alpha^2(1)$ を用いて，Z^2 に基づく棄却域を $(\chi_\alpha^2(1), \infty)$ と定めることになる．以上を一般化すると，仮説 $H: p_1 = p_{10}, \cdots, p_k = p_{k0}$ のもとで，統計量

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} \tag{8・2}$$

に基づく検定を考える．統計量 χ_0^2 は，n がある程度大きいとき，漸近的に自由度 $k - 1$ のカイ 2 乗分布 χ_{k-1}^2 に従うことが知られている．そこで，χ_{k-1}^2 分布の上側 100α%点 $\chi_\alpha^2(k-1)$ を用いて，χ_0^2 に基づく棄却域を $(\chi_\alpha^2(k-1), \infty)$ と定める．このとき，χ_0^2 の実現値 x_0^2 に基づいて

$$\begin{aligned} &x_0^2 > \chi_\alpha^2(k-1) \quad \text{ならば } H \text{ を棄却,} \\ &x_0^2 \leq \chi_\alpha^2(k-1) \quad \text{ならば } H \text{ を受容} \end{aligned} \tag{8・3}$$

という検定を行う．H が受容されれば，そのデータは仮説のモデルに適合すると考えられ，

この検定を**カイ 2 乗適合度検定**（chi-square test of goodness-of-fit）という．なお，この検定の適用は n が大きいことが条件であるが，目安として $np_{i0} \geq 5\ (i = 1, \cdots, k)$ が満たされればよいといわれている．また，近似の精度を向上させるために χ_0^2 を連続補正した統計量

$$\chi_{0\star}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(|X_i - np_{i0}| - 0.5)^2}{np_{i0}} \tag{8・4}$$

も知られている．これは**イエーツの補正**（Yates' correction）と呼ばれている．

■12 群 - 3 編 - 8 章

8-6 独立性の検定

（tests for independence）

（執筆者：青嶋　誠）[2009 年 2 月 受領]

観測されたデータを幾つかの属性に従って分類し，それら属性の間の独立性を検定することを考える．いま，2 つの属性 A, B があって，調査対象の n 人が，属性 A について $A_1, \cdots, A_r$ なる $r\,(\geq 2)$ 個のクラスのどれか一つに，属性 B について $B_1, \cdots, B_s$ なる $s\,(\geq 2)$ 個のクラスのどれか一つに分類されるとする．A_i, B_j で定まるセルに分類される人数を $N_{ij}\ (i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, s)$ とする．このとき，$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} N_{ij} = n$ である．クラス A_i の人数を $N_{i\cdot}$，クラス B_j の人数を $N_{\cdot j}$ とすると，$N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} N_{ij}$，$N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij}$，$\sum_{i=1}^{r} N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} N_{\cdot j} = n$ である．これを表にしたものを $r \times s$ **分割表**（contingency table）という．この標本に対する確率モデルは，A_i, B_j で定まるセルの比率を母数 p_{ij} で表せば，人数 $(N_{ij}, i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, s)$ は**多項分布** $M_{rs}(n; p_{ij}, i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, s)$ に従う．ここで，$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$ である．いま，$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij}$，$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij}$ として，属性 A, B の**独立性の仮説** $H : p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}\ (i = 1, \cdots, r;\ j = 1, \cdots, s)$ について有意水準 α の検定を考える．仮説のモデルに対する適合度を，H の下での N_{ij} とその期待値 $np_{i\cdot}p_{\cdot j}$ の隔たり

表 8･1　属性 A, B による $r \times s$ 分割表

$A \backslash B$	B_1	$\cdots$	B_s	**横計**
A_1	N_{11}	$\cdots$	N_{1s}	$N_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	N_{r1}	$\cdots$	N_{rs}	$N_{r\cdot}$
縦計	$N_{\cdot 1}$	$\cdots$	$N_{\cdot s}$	n

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{ij} - np_{i\cdot}p_{\cdot j})^2}{np_{i\cdot}p_{\cdot j}}$$

で測ることが考えられる．一般には $p_{i\cdot}(i = 1, \cdots, r)$，$p_{\cdot j}(j = 1, \cdots, s)$ は未知なので，これらを最尤推定量 $\hat{p}_{i\cdot} = N_{i\cdot}/n$，$\hat{p}_{\cdot j} = N_{\cdot j}/n$ で点推定して，統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\{N_{ij} - (N_{i\cdot}N_{\cdot j}/n)\}^2}{(N_{i\cdot}N_{\cdot j}/n)} \tag{8･1}$$

を定義する．統計量 χ^2 は，n がある程度大きいとき，漸近的に自由度 $(r-1)(s-1)$ のカイ 2 乗分布 $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ に従うことが知られている．そこで，$\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ 分布の上側 100α%点 $\chi^2_\alpha((r-1)(s-1))$ を用いて，χ^2 に基づく棄却域を $(\chi^2_\alpha((r-1)(s-1)), \infty)$ と定める．このとき，χ^2 の実現値 x^2 に基づいて

$$\begin{aligned} &x^2 > \chi^2_\alpha((r-1)(s-1)) \quad \text{ならば } H \text{ を棄却,} \\ &x^2 \leq \chi^2_\alpha((r-1)(s-1)) \quad \text{ならば } H \text{ を受容} \end{aligned} \tag{8･2}$$

という検定を行う．なお，この検定の適用は n が大きいことが条件であるが，H のもとでの各セル (i, j) の期待値 $np_{i\cdot}p_{\cdot j}$ あるいは $n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n$ が 5 以上であることが目安となる．そうでないときには，セルを合併した方がよい．

■参考文献

1) 赤平昌文 :“ 統計解析入門, ” 森北出版, 2003.
2) 稲垣宣生 :“ 数理統計学（改訂版）, ” 裳華房, 2003.
3) 竹内　啓, 他編 :“ 統計学辞典, ” 東洋経済新報社, 1989.