

7 章 電磁場と荷電粒子の相互作用

(執筆者: 清水清孝)[年 月 受領]

概要

【本章の構成】

12 群 - 5 編 - 7 章

7-1 古典的電磁場のマクスウェル方程式

(執筆者：清水清孝)[2009年1月受領]

7-1-1 電場と磁場

電磁場を記述する法則は次のマクスウェル (Maxwell) の方程式で与えられる .

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7\cdot1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7\cdot2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (7\cdot3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (7\cdot4)$$

ここで \mathbf{E} は電場, \mathbf{B} は磁束密度 (今後は \mathbf{B} を磁場と呼ぶ) であり, 真空中では電束密度 \mathbf{D} は誘電率 ϵ_0 を用いて $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, 磁場の強さ \mathbf{H} は透磁率 μ_0 を使って $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ となる. また ρ は電荷密度, \mathbf{j} は電流密度である. 電荷密度と電流密度は式 (7・1) と式 (7・4) を使うと, 次の流れの保存則を満たしていることを簡単に示すことができる .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (7\cdot5)$$

電磁場のもっているエネルギー密度 u は電場と磁場で次のように書ける .

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (7\cdot6)$$

7-1-2 ベクトルポテンシャルによる記述

ポテンシャル ϕ と三次元のベクトルポテンシャル \mathbf{A} を次の式を満たすように導入しよう .

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (7\cdot7)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7\cdot8)$$

このポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) (今後は ϕ と \mathbf{A} をまとめてベクトルポテンシャルと呼ぶ) を使うと, マクスウェルの方程式で式 (7・2) と式 (7・3) は自動的に満たされる. それではマクスウェルの方程式 (7・1) と式 (7・4) を満たすためには (ϕ, \mathbf{A}) はどんな方程式に従うのだろうか .

この問題について考える前に, ベクトルポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) のもっている任意性について考えてみよう. 通常のパテンシャルに対してある定数を加えて定義しても, 物理的に意味のあるのはポテンシャルエネルギーの差なので問題はない. それと類似の任意性として, ベクトルポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) に対しては, 以下のような変換に対する任意性がある .

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (7\cdot9)$$

ただしここで χ は座標と時間の関数 $\chi(\mathbf{r}, t)$ で, ($\text{電荷} \times \chi$) はエネルギー・時間の次元をも

つ、この変換に対して明らかに電場と磁場は不変である。この変換をゲージ (Gauge) 変換と呼ぶ。

話を (ϕ, A) の従う方程式に戻そう。まずマクスウェルの方程式 (7.1) に式 (7.7) を代入してみる。すると次の条件 (ローレンツ (Lorentz) 条件) をつけると方程式は以下で示すように簡単なかたちになることが分かる。

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7.10)$$

この条件を満たすようなベクトルポテンシャル (ϕ, A) がとれることは、ゲージ変換に対する不変性を使えば明らかであろう。ローレンツ条件のもとでマクスウェルの方程式 (7.1) は次の波動方程式となる。

$$\square \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ただし} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (7.11)$$

また方程式 (7.4) は、公式 $\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A)$ とローレンツ条件を使うと以下のかたちになる。

$$\square A = \mu_0 j \quad (7.12)$$

ただし $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を使った。

方程式 (7.11), (7.12) とローレンツ条件式 (7.10) は、更に次のゲージ変換に対して不変になっていることに注意しよう。

$$A \rightarrow A + \nabla \Lambda, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (7.13)$$

ただし Λ は $\square \Lambda = 0$ を満たす座標と時間の関数である。

7-1-3 自由な電磁場の解

電荷密度 $\rho = 0$ の場合、 ϕ に対する方程式は $\square \phi = 0$ となるが、ゲージ変換に対する不変性を使い、 $\phi = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ となる Λ を導入することで $\phi = 0$ とできる。このときローレンツ条件よりベクトルポテンシャル A は $\nabla \cdot A = 0$ となる。自由な電磁場の場合、電流密度 $j = 0$ として、方程式 (7.12) の解は次のようになる。

$$A = A_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (7.14)$$

ここで ω は角振動数、 k は波数ベクトルで k をその大きさとする $\omega = ck$ である。また A_0 は一般に k に依存する定数であり、 e は A の方向を表し、ベクトル k に依存する単位ベクトルである。 $\nabla \cdot A = 0$ の条件より e はベクトル k と直交する。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (7.15)$$

この A から電場と磁場を求めると、 E, B 共に波の進行方向を示すベクトル k と直交していることが分かる。このことは電磁波が横波であることを意味する。

12 群 - 5 編 - 7 章

7-2 荷電粒子との相互作用

(執筆者：清水清孝)[2009 年 1 月受領]

7-2-1 古典力学における荷電粒子との相互作用

電荷をもった粒子が電磁場のなかに置かれると、電場に平行な方向に力を受ける。また、この粒子が磁場中を運動をしていると速度と磁場に垂直な方向にいわゆるローレンツ (Lorentz) 力といわれる力を受ける。いま粒子の電荷を q とすると、受ける力 F は速度を v とすると以下のように書ける。

$$F = q(E + v \times B) \quad (7 \cdot 16)$$

この力による質量が m の粒子の運動を記述するニュートン (Newton) の運動方程式は次のラグランジアン L から導くことができる。

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + qA \cdot \frac{dr}{dt} - q\phi \quad (7 \cdot 17)$$

このことはラグランジアン L をオイラー・ラグランジェ (Euler-Lagrange) の方程式に代入すれば簡単に確かめることができる。結果は以下のとおりである。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m \frac{d^2 r}{dt^2} - q(E + v \times B) = 0 \quad (7 \cdot 18)$$

ここで r の時間微分を $\dot{r} = v$ と略記した。座標 r に対する運動量 p はラグランジアン L から以下ようになる。

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \frac{dr}{dt} + qA \quad (7 \cdot 19)$$

この運動量を使ってハミルトニアン H を求めると次のようになる。

$$H = p \cdot \frac{dr}{dt} - L = \frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \quad (7 \cdot 20)$$

これが電磁場と質量 m 、電荷 q の粒子との相互作用を記述するハミルトニアンである。

7-2-2 電磁場中でのシュレーディンガー方程式

式 (7-20) より質量 m 、電荷 q の粒子の電磁場中でのシュレーディンガー方程式は次のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = \left[\frac{1}{2m} (p - qA)^2 + q\phi \right] \Psi \quad (7 \cdot 21)$$

マクスウェルの方程式はベクトルポテンシャルに対するゲージ変換で不変であったが、このシュレーディンガー方程式はどうだろうか。単純に方程式 (7-21) で A を $A + \nabla\chi$ 、 ϕ を $\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ とすると方程式のかたちは不変ではない。実は、このゲージ変換をベクトルポテンシャルに

対して行うとき、同時に粒子の波動関数 Ψ に対して位相をつける変換を行うと方程式のかたちが不変になることを以下のようにして示すことができる。

$$A' = A + \nabla\chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \Psi' = e^{\frac{iq\chi}{\hbar}} \Psi \quad (7\cdot22)$$

Ψ をシュレーディンガー方程式に代入すると、簡単な計算で以下の式を得る。

$$i\hbar \frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}')^2 + q\phi' \right] \Psi' \quad (7\cdot23)$$

このことをシュレーディンガー方程式 (7·21) は局所的ゲージ変換に対して不変なかたちをしているという。現在の理論物理学においては、波動関数 Ψ に場所と時間に依存する位相をつける変換に対して、方程式が不変であることを要請してゲージ場（今の場合は電磁場）を導入する「ゲージ理論」が相互作用のかたちを決める指針であると考えられている。

一様な電場 E がある場合は、式 (7·7) より、ポテンシャルとして以下のかたちを採用すればよい。

$$\phi = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \quad (7\cdot24)$$

次に、一様な弱い磁場 B がある場合について考えてみよう。ベクトルポテンシャル A は、 $A = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$ ととれる。これを式 (7·21) のハミルトニアン H の中の A に代入すれば磁場によるエネルギー変化は磁場 B の 1 次の項までとって以下ようになる。

$$\delta E = -\frac{q}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = -\frac{q\hbar}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \quad (7\cdot25)$$

ここで L は軌道角運動量である。これは既にゼーマン効果の議論のところで出てきた相互作用である。

既に電子はスピンと呼ばれる固有な角運動量（大きさ=1/2）をもっていることは議論した。その角運動量によるエネルギーの変化はどのように書けるのだろうか。そのためには電子の運動を相対論的に記述する方程式（ディラック（Dirac）方程式）で電磁場との相互作用を考える必要がある。実はこの場合もここで議論したゲージ不変性からくる置き換え、つまり運動量 p を $p - qA$ 、エネルギー E を $E - q\phi$ に置き換えればよい。このようにして磁場によるエネルギーの変化を求めると次のようになることが分かる。詳細は第 10 章で議論する。

$$\delta E = -\frac{q\hbar}{2m} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\frac{q\hbar}{2m} \mathbf{B} \cdot (2s) \quad (7\cdot26)$$

ここで、電子のスピン角運動量は s で $\boldsymbol{\sigma}$ は $\boldsymbol{\sigma} = 2s$ で第 3 章で議論したパウリのスピン行列である。スピン角運動量の場合、軌道角運動量の場合の L の代わりに s とするのではなく 2 倍になっている点に注意しよう。

12 群 - 5 編 - 7 章

7-3 電磁場の量子化

(執筆者: 清水清孝) [2009 年 1 月受領]

光は原子によって吸収されたり, また励起状態にある原子から放出されたりする. この現象を記述するためには電磁場を量子化しておく方が便利である. 荷電粒子が相互作用して光を吸収したり放出するのを記述するのはハミルトニアンの中のどの項だろうか. まず $(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m$ の項を展開してみよう. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ と $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ は $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ であることを思い出せば, 等しくなり $-q\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}/m$ である. また $q^2 A^2$ の項は電荷の二次の項であり, 摂動論的に考えれば $-q\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}/m$ に比べて小さいと考えられるのでここでは考えない. さて $-q\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}/m$ の項は式 (7.14) から分かるように, 時間の依存性が $\exp(\pm i\omega t)$ である. 第 6 章の時間に依存する摂動論のところで学んだように, 摂動項の時間の依存性が $\exp(-i\omega t)$ の場合, その系はエネルギー $\hbar\omega$ を受取り, 時間の依存性が $\exp(+i\omega t)$ の場合はその系はエネルギー $\hbar\omega$ を放出する. したがって, 電磁場を記述する式 (7.14) の第 1 項目を光 (今後, 量子化されたとして光子と呼ぶ) を消滅させる項, そして, その複素共役の項を光子を生成する項に対応させよう. 光子の生成と消滅を記述する演算子としては, 調和振動子の議論で使われるエネルギーの昇降演算子 a^\dagger と a との類似で以下の演算子を用いる.

$$\begin{aligned} \text{波数ベクトルが } \mathbf{k}, \text{ 偏りが } \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \text{ の光子の生成演算子} &= a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \\ \text{波数ベクトルが } \mathbf{k}, \text{ 偏りが } \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \text{ の光子の消滅演算子} &= a_{\mathbf{k}\lambda} \end{aligned}$$

ここで偏りベクトルは波数ベクトルと直交するため $\lambda = 1, 2$ の 2 通りしかない. 波数ベクトルは連続的な値をとるが, ここでは長さ L の立方体のなかに光子を閉じ込めたとして離散的に取扱い, 最終的に $L \rightarrow \infty$ とすることにしよう. この場合光子のベクトルポテンシャルは周期的な境界条件を満たすから $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ とすると, k_i は次のような離散的な値をとる.

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad n_i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7.27)$$

また, 波数ベクトルに関する和は $L \rightarrow \infty$ において, \mathbf{k} に関する積分で置き換えられる.

$$\sum_{n_x n_y n_z} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int dk_x dk_y dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk_x dk_y dk_z \quad (7.28)$$

以上のように波数ベクトルを離散的に取り扱い, 光子の生成演算子 $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ と光子の消滅演算子 $a_{\mathbf{k}\lambda}$ との交換関係は調和振動子との類似で以下のようになることを要請する.

$$[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.29)$$

この交換関係はボーズ粒子に対して一般的に要求される交換関係であり, 光子はボーズ統計に従うことが知られている. また $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$ は波数ベクトルが \mathbf{k} , 偏りが λ の光子の数の演算子であることが分かる. 以上の結果を使って電磁場を量子化すると以下ようになる.

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} A_0 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} (e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda} + e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) \quad (7.30)$$

さて、ここでベクトルポテンシャル A の係数 A_0 を決定しよう。これは量子化された光子が $\hbar\omega$ のエネルギーをもつことを考慮すれば決まる。そのために電磁場のエネルギーを式 (7・6) より求めよう。マクスウェルの方程式より電場と磁場は次のようになる。

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} A_0 i\omega \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda} + h.c. \quad (7 \cdot 31)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} A_0 i(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda} + h.c. \quad (7 \cdot 32)$$

ここでは簡単のためにエルミート共役量を $h.c.$ と略記した。これより電磁場のエネルギーは以下ようになる。

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dx dy dz \quad (7 \cdot 33)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \varepsilon_0 A_0^2 V (\omega^2 + k^2 c^2) (a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}) \quad (7 \cdot 34)$$

ここで $a^\dagger a$ 及び aa^\dagger の項については以下の積分を使った。

$$\int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dx dy dz = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (7 \cdot 35)$$

また $a^\dagger a^\dagger$ 及び aa の項については上記と同様の積分の式より $\mathbf{k} = -\mathbf{k}'$ の場合の和が残るが次の関係でゼロとなる。

$$\omega^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}\lambda'} + c^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k}\lambda'}) = 0 \quad (7 \cdot 36)$$

ここで a と a^\dagger の交換関係 $a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} = 1$ を使うと U は以下のように書ける。

$$U = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (2\varepsilon_0 A_0^2 \omega^2 V a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \varepsilon_0 A_0^2 \omega^2 V) \quad (7 \cdot 37)$$

ここで、右辺の 1 項目は光子の数の演算子を含む項であり、2 項目は真空状態でも存在する項で零点エネルギーと呼ばれる。光子の数に比例する項のエネルギーを量子化された光子のエネルギーに等しいとおくと、ベクトルポテンシャル A の係数は以下のように決まる。

$$2\varepsilon_0 A_0^2 \omega^2 V = \hbar\omega \quad \rightarrow \quad A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega V}} \quad (7 \cdot 38)$$

以上をまとめると、量子化された光子のベクトルポテンシャルは以下のように書ける。

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} (e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda} + e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger) \quad (7 \cdot 39)$$

12 群 - 5 編 - 7 章

7-4 原子による光の吸収と放出

(執筆者：清水清孝)[2009年1月受領]

励起状態にある原子は光子を放出してエネルギーの低い準位に遷移する。ここでは第6章の時間に依存する摂動論の結果を応用して遷移確率を求めてみよう。光子と相互作用をするのは電子であるから、ここでは電子が状態 i から f に遷移するとしよう。そこで、電子を記述するハミルトニアンを無摂動の H_0 とし、電子と光子の相互作用を H_{int} としよ。すると全系のハミルトニアン H は次のようになる。

$$H = H_0 + H_{int} \quad (7.40)$$

ここで H_{int} は光子の放出を記述する相互作用だから式 (7.21) で A^2 を省略すると、 $H_{int} = -q\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}/m$ となる。ここで m は電子の質量で q は電荷であり \mathbf{p} は電子の運動量演算子である。放出を記述する項の時間依存性を除いた部分を v と書くと $H_{int} = v e^{i\omega t}$ で v は以下のようになる。

$$v = - \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \quad (7.41)$$

これを使うと、遷移確率 W_{if} は次の式で与えられる。

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} |\langle f, \mathbf{k}\lambda | v | i \rangle|^2 \delta(E_f + \hbar\omega - E_i) \quad (7.42)$$

ここで、光子の波数ベクトルの和を積分で置き換えてやると、 W_{if} は次のようになる。

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (7.43)$$

$$\times \int \sum_{\lambda} |\langle f | e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \delta(E_f + \hbar\omega - E_i) k^2 d\mathbf{k} d\Omega_{\mathbf{k}} \quad (7.44)$$

$$= \frac{\pi}{\epsilon_0 \omega} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{\hbar c^3} \int \sum_{\lambda} |\langle f | e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 d\Omega_{\mathbf{k}} \quad (7.45)$$

ここで δ 関数の積分を実行したので、今後現れてくる ω は $\omega = kc = (E_i - E_f)/\hbar$ である。次に、電子の i と f の間の行列要素の計算と光子の偏り λ の和及び光子の放出される方向に関する積分を行う。

行列要素の計算の前に波数 k の大きさについて簡単に評価してみよう。まず、放出される光子のエネルギーは電子の束縛エネルギー程度だから、水素原子だとすると、

$$\hbar kc \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a_0}, \quad a_0 = \text{ボーア半径} \quad (7.46)$$

したがって次のようになる。

$$ka_0 \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\hbar c} \sim \frac{1}{2 \times 137} \ll 1 \quad (7\cdot47)$$

つまり、放出される光子の波長は $2\pi/k \gg a_0$ である。

以上より行列要素を求める際 $\exp(-ik \cdot r) \sim 1$ と近似してよいことが分かる。すると電子に関する行列要素は $\langle f | e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p} | i \rangle$ となり、これはハイゼンベルグ表示を使えば以下のようにして座標 \mathbf{r} の行列要素と関係がつく。この近似のことを双極子近似という。

$$\langle f | e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{p} | i \rangle = \frac{im}{\hbar} \langle f | e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot [H_0, \mathbf{r}] | i \rangle \quad (7\cdot48)$$

$$= \frac{im}{\hbar} \langle f | H_0 e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{r} - e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{r} H_0 | i \rangle = -im\omega \langle f | e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{r} | i \rangle \quad (7\cdot49)$$

次に、光子の偏り λ の和と立体角 Ω_k に関する積分を実行しよう。 $e_{\mathbf{k}\lambda}$ が光子の波数ベクトルと直交している事を使えば λ の和をとることにより次の結果を得る。

$$\int \sum_{\lambda} |\langle f | e_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{r} | i \rangle|^2 d\Omega_k = \int |\langle f | \mathbf{r} | i \rangle|^2 \sin^2 \theta d\Omega_k \quad (7\cdot50)$$

$$= \frac{8\pi}{3} |\langle f | \mathbf{r} | i \rangle|^2 \quad (7\cdot51)$$

ここで θ は \mathbf{k} と \mathbf{r} の間の角度である。 λ の和は \mathbf{k} と直交する \mathbf{r} の成分の 2 乗の和を与えることより $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ が出てきた。

以上の結果をまとめると遷移確率 W_{if} は次のようになる。

$$W_{if} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle f | \mathbf{r} | i \rangle|^2 \quad (7\cdot52)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} (|\langle f | x | i \rangle|^2 + |\langle f | y | i \rangle|^2 + |\langle f | z | i \rangle|^2) \quad (7\cdot53)$$

以上の計算においては、光子の生成演算子の a^\dagger の行列要素を真空から光子が 1 個いる状態で求めた。一般に同じ状態にいる（波数ベクトルと偏りが同じ）光子の数が n 個から $(n+1)$ 個への遷移を考えれば $|(n+1 | a^\dagger | n)|^2 = n+1$ だから遷移確率は光子の個数 $(n+1)$ に比例することになる。 $n=0$ の場合でも遷移するわけでこのことを自然放出、また n に比例する部分を誘導放出と呼ぶ。