■12 群（電子情報通信基礎）－ 5 編（量子力学・電子物理・相対論）

10 章 相対論的波動方程式

（執筆者：清水清孝）[2009 年 1 月 受領]

■概要■

今まで扱ってきたシュレーディンガー方程式は，非相対論の波動方程式である．この章では，時間と空間に関係したローレンツ変換，4 元ベクトル及びエネルギーと運動量の関係を簡単に説明し，相対論的な波動方程式を考察しよう．

【本章の構成】

■12 群 - 5 編 - 10 章

10-1 ローレンツ変換

（執筆者：清水清孝）［2009 年 1 月 受領］

10-1-1 4 元ベクトル

2 個の座標系 K と K' があり，座標系 K' は K に対して，ある方向に一定の速度 $\boldsymbol{V}$ で動いているとする．簡単のために，速度 $\boldsymbol{V}$ の方向を z 軸方向としよう．いまある質点の座標を座標系 K と座標系 K' で以下のように書く．

$$K:(t,x,y,z) \qquad K':(t',x',y',z') \tag{10・1}$$

するとお互いの間の関係は以下のように書ける．ただし両方の座標系は $t=0$ で一致していたとする．

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}t - \frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}z \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -\frac{V}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}}z \end{aligned} \tag{10・2}$$

ここで c は光の速さである．これをローレンツ（Lorentz）変換という．c を無限大にすると，よく知られたガリレイ（Galilei）変換になる．

上記の変換から分かるようにローレンツ変換では以下の量が不変となる．

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{10・3}$$

これからの議論のために 4 元ベクトルと計量テンソルを導入しよう．まず 4 元ベクトル x^μ を以下のように書く．

$$x^\mu = (ct, \boldsymbol{r}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{10・4}$$

ここで $x^0 = ct$ は時間成分で，$\boldsymbol{r}$ は通常の三次元空間での座標ベクトルである．一般にローレンツ変換で x^μ と同じに変換される 4 元ベクトルを A^μ と書き，そのベクトルの空間部分の符号を変えたものを A_μ と書くことにする．

$$A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A}) \qquad A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A}) \tag{10・5}$$

A^μ と A_μ の間の変換を $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ と書き計量テンソルと呼ぶ．

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \qquad A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \tag{10・6}$$

ここで二度現れる添字 ν については 0 から 3 までの和をとるものとする．今後も同じ添字が

現れた場合は特別な場合を除いては，和をとるものとする．定義から明らかなように計量テンソルは，対角成分が 1, −1, −1, −1 で，それ以外は 0 の 4 行 4 列の行列である．また添字に関しても，上と下とで同じで以下のようになる．

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tag{10・7}$$

2 個の 4 元ベクトルの内積は以下のように定義される．

$$A \cdot B = A^0 B_0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \tag{10・8}$$

この内積はローレンツ変換において不変である．

最後に時間及び空間の微分演算子がローレンツ変換においてどのような変換性をもっているかについて考察しよう．ローレンツ変換式 (10・2) から分かるように次の微分演算子は 4 元ベクトル x_μ と同じ変換性をもつ．

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \boldsymbol{\nabla}\right) \tag{10・9}$$

ここで微分演算子を簡略して ∂_μ と書いた．また添字が上付きの，4 元ベクトル x^μ と同じ変換性をもつ微分演算子は以下のようになる．

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{10・10}$$

10-1-2 エネルギーと運動量

時間と空間座標は４元ベクトルであるが，それでは速度はどうだろうか．質点の速度は座標系 K では $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ であり，座標系 K' においては $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t'$ である．これは明らかにローレンツ変換において，4 元ベクトルと同じようには変換されない．そこで質点といっしょに動いている座標系での時間を導入しよう．いま座標系 K からみた質点の速度を v とすると，質点と共に動いている系での微小な時間間隔は以下のようになる．

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{10・11}$$

これを使って 4 元速度を以下のように定義しよう．

$$u_0 = \frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・12}$$

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・13}$$

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・14}$$

$$u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・15}$$

定義から明らかなように，4 元速度はローレンツ変換において，時間・座標と同じように変換される．次にこの 4 元速度と粒子のもつエネルギー・運動量の関係について考察しよう．自由粒子に対するラグランジアン L は, 作用が L の時間積分で与えられることを考慮し，それがローレンツ変換で不変になることを要請すると以下のようになる．

$$L = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{10・16}$$

ただし m は粒子の質量である．これより運動量は次のようになる．

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・17}$$

したがって粒子のエネルギーは次のようになる．

$$E = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{10・18}$$

以上の式と 4 元速度を比べると，以下のベクトルが 4 元ベクトルとなることがわかる．

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \tag{10・19}$$

この 4 元ベクトルはローレンツ変換で座標 x^{μ} と同じに変換されるので添字を上に付けておく．これは運動量 4 元ベクトルと呼ばれる．この 4 元ベクトルの内積はローレンツ変換において不変であり次のようになる．

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}(m^2c^2 - m^2v^2) = m^2c^2 \tag{10・20}$$

これより自由粒子のエネルギーと運動量の間に以下の関係が成立する事がわかる．

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{10・21}$$

この関係式で $p \ll mc$ ならば，エネルギーは以下のようになり，

$$E = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} \tag{10・22}$$

静止エネルギー mc^2 と非相対論的な運動エネルギーの和になることがわかる．

■12 群 － 5 編 － 10 章

10-2 クライン・ゴルドンの方程式

（執筆者：清水清孝）［2009 年 1 月 受領］

相対論的なエネルギーと運動量の関係は以下の式で与えられることが分かった．

$$E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 = 0 \tag{10・23}$$

さて非相対論の場合は，エネルギーと運動量の関係式において，エネルギーを時間微分，運動量を空間微分で置き換えることで波動方程式が得られた．この置き換えを 4 元ベクトルで表せば，運動量 4 元ベクトル p^μ を微分演算子の 4 元ベクトル ∂^μ で次のように置き換えることに対応する．

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \to \mathrm{i}\hbar\partial^\mu = \mathrm{i}\hbar\left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{10・24}$$

以上より相対論的な波動方程式は次のようになる．

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\right]\phi = 0 \tag{10・25}$$

これをクライン・ゴルドン（Klein-Gordon）の方程式と呼ぶ．さて，ここで方程式 (10・25) に ϕ^* をかけた式から，方程式 (10・25) の複素共役をとり，ϕ をかけた式を引くと次の関係式が得られる．

$$\phi^*\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\boldsymbol{\nabla}^2\phi\right) - \left(\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} - c^2\boldsymbol{\nabla}^2\phi^*\right)\phi = 0 \tag{10・26}$$

この式は以下のように書き直すことができる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi\right] + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)ot[-c^2\phi^*(\boldsymbol{\nabla}\phi) + c^2(\boldsymbol{\nabla}\phi^*)\phi] = 0 \tag{10・27}$$

ここで密度と流れを導入して上記の式を書き直すと次のような流れの保存則になる．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{10・28}$$

ただし ρ と $\boldsymbol{j}$ は以下で定義される密度と流れである．

$$\rho = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\phi\right) \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\{\phi^*(\boldsymbol{\nabla}\phi) - (\boldsymbol{\nabla}\phi^*)\phi\} \tag{10・29}$$

以上の関係式を 4 元ベクトルを使って書くと次のようになる．

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\{\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi\} \tag{10・30}$$

これを使うと 4 元ベクトルの内積としてローレンツ不変なかたちで書いた流れの保存則は以

下のようになる．

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{10・31}$$

ここで自由粒子の解に対して流れを具体的に計算してみよう．クライン・ゴルドン方程式の解は，運動量を $\boldsymbol{p}$ とし $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ を満たすエネルギーを E とするとローレンツ不変なかたちで以下のように書ける．

$$\phi(x) = N\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p^\mu x_\mu\right) = N\exp\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar} - \mathrm{i}\frac{Et}{\hbar}\right) \tag{10・32}$$

ここで N は規格化定数である．これより密度と流れを求めると次のようになる．

$$\rho = \frac{E}{mc^2}\,|\,\phi\,|^2 \qquad\qquad \boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}\,|\,\phi\,|^2 \tag{10・33}$$

このかたちは，エネルギー E に対して非相対論の極限をとると，シュレーディンガー方程式から得られる密度と流れに一致している．ただし本質的に異なる点がある．それは，いま運動量が与えられたときにエネルギー E として，正の解と負の解が存在することである．これは，実は反粒子の状態を記述すると解釈されるがここではこれ以上深入りするのはやめる．詳しく学びたい読者は場の量子論の専門書を参考にされたい．

■12 群 - 5 編 - 10 章

10-3 ディラック方程式

（執筆者：清水清孝）［2009 年 1 月 受領］

10-3-1 ディラック方程式の導出

相対論的な波動方程式を見いだすという問題に対して，今までは $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ という，2 次式を基に議論してきた．これに対してディラック（Dirac）は次のような時間について 1 階の微分方程式を出発点として考察した．

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{10・34}$$

相対論では時間と空間は対等に扱われているから，ここで現れたハミルトニアン H は空間の 1 階の微分で書かれていなければならない．そこで H として次のようなかたちを仮定しよう．

$$H = -\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta mc^2 \tag{10・35}$$

ただし $\boldsymbol{\alpha}$ は三次元のベクトル，β は一次元の定数である．ここで方程式を時間でもう一度微分して，これが前節のクライン・ゴルドン方程式を満たすと仮定すると次の関係式を得る．

$$H^2 = (-\mathrm{i}\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \beta mc^2)^2 = -\hbar^2c^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^4 \tag{10・36}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ の成分を使って書くと以下のようになる．

$$-\hbar^2c^2\sum_{j,k=1}^{3}\alpha_j\alpha_k\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{\nabla}_k - \mathrm{i}mc^3\hbar\sum_{j=1}^{3}(\alpha_j\beta + \beta\alpha_j)\boldsymbol{\nabla}_j + \beta^2m^2c^4 = -\hbar^2c^2\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{\nabla}_j^2 + m^2c^4 \tag{10・37}$$

したがってここで導入した定数 $\boldsymbol{\alpha}$ と β は以下のような関係を満たさなければならない．

$$\beta^2 = 1, \qquad \alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0, \qquad \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2,3) \tag{10・38}$$

この式より明らかなように，α_j や β は通常の複素数ではない．それではどのような行列が可能だろうか．まず $\alpha_j^2 = 1$ と $\beta^2 = 1$ より固有値は ± 1 である．さて上記の式より，$\alpha_j = -\beta\alpha_j\beta$ となるから α_j のトレースは次のようになり，ゼロであることがわかる．

$$\mathrm{Tr}\alpha_j = -\mathrm{Tr}\beta\alpha_j\beta = -\mathrm{Tr}\beta^2\alpha_j = -\mathrm{Tr}\alpha_j \tag{10・39}$$

同様にして $\mathrm{Tr}\beta = 0$ も簡単に示せる．このようにトレースがゼロであることと，固有値が ± 1 であることより行列の次元は偶数でなければならない．またハミルトニアンがエルミートであることより，この行列もエルミートでなければならない．二次元で以上の条件を満たす行列は，第 4 章で扱ったパウリのスピン行列があるが，独立なものは 3 個しか存在しない．したがって最も簡単なかたちでも 4 行 4 列の行列となることが分かる．上記の条件を満たす 4 行 4 列の行列として以下のかたちを採用しよう．

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10・40}$$

ここで σ_j は第 4 章で出てきた 2 行 2 列のパウリのスピン行列で，1 も簡略化した書き方であるが 2 行 2 列の単位行列を表す．そうして得られる α_j や β は 4 行 4 列の行列である．この行列を使ってディラック方程式は以下のように書ける．

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\mathrm{i}\hbar c\alpha_j\boldsymbol{\nabla}_j + \beta mc^2)\psi \tag{10・41}$$

ここで波動関数 ψ は 4 行の縦ベクトルで，スピノール（Spinor）と呼ばれる．

10-3-2 ディラックの γ 行列

時間と空間の微分の扱いを見やすくするために，上記のディラック方程式に β をかけたかたちに書き直してみよう．

$$(\mathrm{i}\hbar\beta\frac{\partial}{\partial t}\psi + \mathrm{i}\hbar c\beta\alpha_j\boldsymbol{\nabla}_j - mc^2)\psi = 0 \tag{10・42}$$

ここで次の 4 行 4 列の行列を成分とする，4 元ベクトル γ^μ を以下のように定義しよう．

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\alpha) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \tag{10・43}$$

具体的に書くと γ^μ は次のかたちになる．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \tag{10・44}$$

これを使うとディラック方程式は以下のように書ける．

$$(\mathrm{i}\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi = 0 \tag{10・45}$$

ここで導入した γ 行列の性質をまとめておこう．まず行列 α_j と β の性質から，γ の反交換関係は次のようになる．

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{10・46}$$

また γ^μ のエルミート共役は，具体的な式から明らかなように空間成分が符号を変える．

$$(\gamma^\mu)^\dagger = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3) \tag{10・47}$$

ここで γ^μ の空間成分と，時間成分の間の反交換関係を使うと以下のようにまとめて書くことができる．

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{10・48}$$

また後の議論で必要となるので次のように γ^5 を定義しておく．

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10・49}$$

この γ^5 は以下の性質をもつ．

$$(\gamma^5)^2 = 1 \tag{10・50}$$

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{10・51}$$

さてここで前節でも考察したように，流れの保存則を導いてみよう．そのためには，クライン・ゴルドンの方程式では方程式の複素共役が必要だったのだが，ディラック方程式の場合は，波動関数 ψ が 4 行の縦ベクトルであることを考慮して，まずディラック方程式のエルミート共役をとってみよう．微分演算子は波動関数に演算することをはっきりさせて書くと以下のようになる．

$$-\mathrm{i}\hbar c(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^\mu)^\dagger - mc^2\psi^\dagger = 0 \tag{10・52}$$

したがって γ^μ を使うと次のようになる．

$$\mathrm{i}\hbar c(\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 + mc^2\psi^\dagger = 0 \tag{10・53}$$

この式に右から γ^0 をかけ，$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ を導入すると以下のようになる．

$$\mathrm{i}\hbar c\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + mc^2\bar{\psi} = 0 \tag{10・54}$$

式 (10・45) に左から $\bar{\psi}$ をかけた式と，式 (10・54) に右から ψ をかけた式を加えると次式を得る．

$$\mathrm{i}c\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \tag{10・55}$$

これは流れの 4 元ベクトルを次のように定義すると，流れの保存則を表している．

$$j^\mu = c\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{10・56}$$

自由粒子の解については次節で考察するとして，ここでは密度に対応する流れの第 0 成分が以下のように，常に正の量になっていることに注意しよう．

$$j^0 = c\bar{\psi}\gamma^0\psi = c\psi^\dagger\psi = c\sum_{j=1}^{4} |\,\psi_j\,|^2 \tag{10・57}$$

ここで ψ_j は 4 行の縦ベクトルの各成分を表す．

■12 群 - 5 編 - 10 章

10-4 自由粒子に対するディラック方程式の解

（執筆者：清水清孝）[2009 年 1 月 受領]

10-4-1 運動量の固有状態

ここではディラック方程式 (10･45) の解を考察しよう．波動関数 ψ は 4 行の縦ベクトルであるから，方程式 (10･45) は 4 元の連立方程式である．そこでまずはじめにすべての成分に共通な部分を取り出せるように式を変形していこう．式 (10･45) を時間で微分することによりと，ψ のすべての成分に対して次のかたちの式を得る．

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{10･58}$$

この方程式の解は 4 元運動量を $(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p})$ とすると次のようになる．

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{p}) \exp\left(\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar} - \mathrm{i}\frac{Et}{\hbar}\right) \tag{10･59}$$

ただしエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ は $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ の関係を満たしているとする．また係数の $u(\boldsymbol{p})$ は 4 行の縦ベクトルである．次に $u(\boldsymbol{p})$ を求めよう．まず $u(\boldsymbol{p})$ を 2 行の縦ベクトル u_L と u_S を使って以下のように書いておこう．

$$u(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} u_L \\ u_S \end{pmatrix} \tag{10･60}$$

すると $u(\boldsymbol{p})$ に対する方程式は以下のような連立方程式になる．

$$\left[c\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_L \\ u_S \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} u_L \\ u_S \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_L \\ u_S \end{pmatrix} \tag{10･61}$$

今後左辺の式の 4 行 4 列の行列を上記のように H と書くことにする．この連立方程式はエネルギー E が $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ を満たす場合，つまり $E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ の場合に解が存在し，その場合 u_L と u_S の関係は次のようになる．

$$u_S = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E + mc^2}u_L \quad \text{または別の書き方として} \quad u_L = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E - mc^2}u_S \tag{10･62}$$

どちらの書き方でも同等であるが，通常は $E > 0$ の場合は前者を使い，$E < 0$ の場合は後者を使う．理由は $p \ll mc$ の場合，つまり非相対論的な場合，$E > 0$ のときは u_L が主要項となり，$E < 0$ のときは u_S が主要項となるからである．

以上でディラック方程式の自由粒子に対する解を求めることができたが，$u(\boldsymbol{p})$ が 4 行の縦ベクトルだったので u_L 及び u_S は 2 行の縦ベクトルであることを考慮すると，エネルギー E が正の場合でも独立な解が 2 個あることになる．独立な状態を以下のように χ と書こう．

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10･63}$$

この 2 個の状態はパウリのスピン行列 σ_3 を使うと，異なる固有状態として区別できることに注意しておこう．

$$\sigma_3\chi^{(1)} = \chi^{(1)} \qquad \sigma_3\chi^{(2)} = -\chi^{(2)} \tag{10・64}$$

以上の結果をまとめると，自由粒子に対する，ディラック方程式の解は運動量が $\boldsymbol{p}$ の場合，独立な解が 4 個存在し，そのうちの 2 個がエネルギーが正の解で残りの 2 個がエネルギーが負の解となる．エネルギーが正の解を $u^{(1)}$ と $u^{(2)}$ と書き，エネルギーが負の解を $u^{(3)}$ と $u^{(4)}$ と書くことにすると，具体的なかたちは以下のようになる．

$$u^{(s)} = N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+mc^2}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad (E > 0) \tag{10・65}$$

$$u^{(s+2)} = N\begin{pmatrix} -\frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|E|+mc^2}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad (E < 0) \tag{10・66}$$

ここで N は規格化定数で u を以下のように規格化することにしよう．

$$u^{(r)\dagger}(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \delta_{rs} \tag{10・67}$$

すると N は $E > 0$ の場合次の式で決まる．

$$N^2\left(1 + \frac{(c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2}{(E+mc^2)^2}\right) = N^2\left(1 + \frac{c^2p^2}{(E+mc^2)^2}\right) = N^2\frac{2E}{E+mc^2} = 1 \tag{10・68}$$

$E < 0$ の場合も全く同様で，E の代わりに $-E$ としておけばよく，両方をまとめて書くと規格化定数 N は次のようになる．

$$N = \sqrt{\frac{|\,E\,| + mc^2}{2\,|\,E\,|}} \tag{10・69}$$

10-4-2 角運動量

中心力場での運動では角運動量が保存された．つまり角運動量演算子とハミルトニアンは交換した．それでは相対論的な場合はどのようになるのだろうか．そこでまず自由粒子を記述する場合の式 (10・61) のハミルトニアン H と，角運動量演算子との交換関係を計算してみよう．角運動量演算子を $\hbar\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ とすると，H との交換関係は次のようになる．

$$[H, \boldsymbol{L}] = c\begin{pmatrix} mc & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc \end{pmatrix}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}c\begin{pmatrix} mc & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc \end{pmatrix} \tag{10・70}$$

これを計算すると次のようになる．

$$[H, \boldsymbol{L}] = c\begin{pmatrix} 0 & [\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}] \\ [\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}] & 0 \end{pmatrix} \tag{10・71}$$

ここで交換関係 $[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}] = -i(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p})$ を使うと角運動量とハミルトニアンの交換関係は次のようになる.

$$[H, \boldsymbol{L}] = c\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \\ -\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{10・72}$$

この結果より軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ はハミルトニアンと交換しないことが分かる．そこで次のような演算子 $\boldsymbol{S}$ とハミルトニアンの交換関係を計算してみよう.

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{10・73}$$

結果は次のようになる.

$$[H, \boldsymbol{S}] = \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 0 & [\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}] \\ [\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}] & 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} \\ \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{10・74}$$

ここで交換関係 $[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}] = 2i(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{p})$ を使った．以上の結果より軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{S}$ の和がハミルトニアンと交換することが分かる．今後はこの和を $\boldsymbol{J}$ と書き，角運動量と呼ぶことにしよう.

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \tag{10・75}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ の交換関係より $\boldsymbol{S}$ の交換関係は以下のような角運動量の交換関係を満たすことは明らかである.

$$[S_1, S_2] = \mathrm{i}S_3 \qquad [S_2, S_3] = \mathrm{i}S_1 \qquad [S_3, S_1] = \mathrm{i}S_2 \tag{10・76}$$

したがって $\boldsymbol{S}$ はスピン角運動量と呼ばれる．また角運動量の合成の一般論から，軌道角運動量とスピン角運動量の和である角運動量 $\boldsymbol{J}$ も角運動量の交換関係を満たす.

以上の議論より，相対論的な方程式では軌道角運動量ではなく，軌道角運動量とスピン角運動量の和である角運動量が自由粒子のハミルトニアンと交換することが分かった．この結果はハミルトニアンに中心力ポテンシャル V が加わった場合も，成り立つことは，$\boldsymbol{L}$ 及び $\boldsymbol{S}$ が共に V と交換する事から明らかである.

最後にスピン角運動量の固有値について考察しよう．まず $\boldsymbol{\sigma}^2 = 3$ より，$\boldsymbol{S}^2 = 3/4$ である．したがって $\boldsymbol{S}^2$ の固有値が $S(S+1)$ であることからスピン角運動量の大きさ S は $S = 1/2$ となる．そしてスピン角運動量の第 3 成分の S_3 の固有値は $\pm 1/2$ となることは明らかであろう.

■12 群 − 5 編 − 10 章

10-5 ディラック粒子と電磁場の相互作用

（執筆者：清水清孝）[2009 年 1 月 受領]

前節までディラック方程式について考察してきた．この方程式に従う粒子は通常ディラック粒子と呼ばれる．いまこの粒子が電荷をもっていたとすると当然電磁場と相互作用をする．ここではこの相互作用について簡単に考察してみよう．第 7 章での議論において，シュレーディンガー方程式では，電磁場 $(\phi, \boldsymbol{A})$ との相互作用の項を取り入れるにはエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ を以下のようにすればよいことを示した．

$$E \to E - q\phi, \qquad \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A} \tag{10・77}$$

ここで，ベクトルポテンシャルを $(\phi, \boldsymbol{A}) = (A^0, \boldsymbol{A})$ と書くと上記の変換は運動量 4 元ベクトルを使って以下のように書ける．

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu \tag{10・78}$$

したがって，電磁場中でのディラック方程式は以下のようになる．

$$[c\gamma^\mu(p_\mu - qA_\mu) - mc^2]\Psi = 0 \tag{10・79}$$

この方程式より，クーロンポテンシャル中でのディラック粒子の運動などについて議論できる．ここでは電磁場が十分弱い場合の相互作用について考察してみよう．4 行の縦ベクトルで書かれる波動関数を 2 行の縦ベクトル Ψ_L と Ψ_S で書こう．するとディラック方程式は以下のかたちになる．

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_S \end{pmatrix} = (E - q\phi)\begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_S \end{pmatrix} \tag{10・80}$$

連立方程式のかたちで書けば次のようになる．

$$c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\Psi_S = (E - q\phi - mc^2)\Psi_L \tag{10・81}$$
$$c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\Psi_L = (E - q\phi + mc^2)\Psi_S \tag{10・82}$$

ここでエネルギーが正の場合の非相対論的な方程式について考えてみよう．まず $E - q\phi + mc^2 \approx 2mc^2$ であることを考慮すれば，式 (10・82) より Ψ_S は Ψ_L を使って以下のように書ける．

$$\Psi_S \simeq \frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\Psi_L \tag{10・83}$$

これを式 (10・81) に代入すると次のようになる．

$$\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})\Psi_L = (E_{NR} - q\phi)\Psi_L \tag{10・84}$$

ここで E_{NR} はエネルギー E から粒子の静止エネルギーを除いた部分で $E_{NR} = E - mc^2$ であ

り，非相対論でのエネルギーに対応する．ここでパウリのスピン行列の性質（問題 2.6）を使うと式 (10･84) の左辺は次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2 - \mathrm{i}q\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{p}) \tag{10･85}$$

$$= (\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2 - q\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \tag{10･86}$$

ここでベクトルの外積の性質とマクスウェルの方程式 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ を使った．したがって非相対論の場合の方程式 (10･84) は次のようになる．

$$\left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2 - \frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}+q\phi\right]\Psi_L = E_{NR}\Psi_L \tag{10･87}$$

この方程式が非相対論の場合のディラック粒子の方程式である．波動関数が 2 行の縦ベクトルのために，2 成分をもつこと以外はシュレーディンガー方程式と同じかたちであり，電磁場との相互作用もほぼ同じかたちで表されている．ただ唯一の大きな違いは，スピン演算子と磁場との相互作用の項が新しく加わっていることである．軌道角運動量が $\boldsymbol{L}$ の場合，磁場 $\boldsymbol{B}$ との相互作用 δH は $(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2$ の項から生じ次のかたちであった．

$$\delta H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \qquad \text{ただし} \qquad \boldsymbol{\mu} = \frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{L} \tag{10･88}$$

ここで $\boldsymbol{\mu}$ は磁気能率である．この式とスピン角運動量による項を比較してみると，ちょうど $\boldsymbol{L}$ を $\boldsymbol{\sigma}$ に置き換えたかたちとなっており，スピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ を使うと次のようになる．

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{q\hbar}{2m}\boldsymbol{S} \qquad \text{ただし} \qquad g = 2 \tag{10･89}$$

これがスピン角運動量による荷電粒子の磁気能率である．ここで導入した g を “g 因子” という．つまりディラック方程式に従う粒子の “g 因子” は 2 である．実験的に電子の “g 因子” はほぼ 2 であることが分かっており，この事実がディラック方程式を疑う余地のないものとした．