

S2 群(ナノ・量子・バイオ) - 5 編(量子通信と量子計算)

3 章 量子計算

(執筆者: 伊藤公平)[2010 年 1 月 受領]

概要

重ね合わせ状態, エンタングルメント, 量子並列性といった量子力学の法則に基づき計算を実行するのが量子計算であり, 理論的・実験的アプローチを両輪とした開発が進んでいる。

理論的アプローチの主題は以下に大別される。量子計算には既存の古典力学の法則に基づく計算機(古典計算機)を上回る性能が望まれている。量子計算が古典計算を上回る性能を発揮できる計算問題が存在するのか? その探求が計算理論分野で展開されている。そのための量子アルゴリズムの開発が必要であり, その指示どおりに量子論理ゲートが実行される必要がある。しかし実際の量子計算には量子ビットの操作エラーに加えてデコヒーレンスという問題がつかまとう。よって不完全な量子ゲート操作の結果を逐次補正する量子誤り訂正アルゴリズムの開発が必要となる。物性や理論化学研究で重要な量子現象のシミュレーションには量子計算が最適であろうという考えが根強い。よって量子物性の原理を用いて量子多体問題を解く量子シミュレーションに関する研究が進んでいる。更に時間的に変化をするハミルトニアンを用意し, 緩やかではあるが連続的に時間変化する量子状態を用いる量子断熱計算も注目を集めている。時間に依存するアナログ計算的な考え方であるが, 最初に設定したハミルトニアンにすべてを任せる従来の方法に加えて, 弱い(すなわち波束の収縮を伴わない)測定結果をフィードバックする量子制御という概念が並行して発展すると考えられる。量子断熱計算と同じコンセプトである量子アニーリングを用いて, 古典計算が苦手とする最適化問題を効率的に解く研究も進んでいる。更に驚く展開が一方向量子計算という新しいコンセプトの登場である。量子アルゴリズムは可逆であり, アルゴリズム実行中は波束の収束につながる強い観測は禁物というのが量子計算の常識であった。ところが計算の途中で強い観測を行うことにより効率の良い量子計算が行えることが提案された。観測により収束した波動関数を元の状態に戻すことはできないので, この観測による量子計算は不可逆となる。

実験的アプローチでは光, 中性原子, イオントラップ, 核磁気共鳴(NMR), 半導体中の不純物や欠陥, 半導体量子ドット, 超伝導体などを量子ビットとして利用する方法の開発が進んでいる。常に量子情報理論の最新状況を念頭に置いて実験計画を立てる必要がある実に学際的な分野である。ナノサイエンス, ナノテクノロジー, 極限計測などの最先端を切り開くことが不可欠であるため, 量子計算開発の副産物が広い科学技術分野の基盤となるであろう。

【本章の構成】

本章では, 上述の主要テーマを網羅する。量子計算理論(3-1 節), 量子誤り訂正(3-2 節), 量子アルゴリズム(3-3 節), 量子シミュレーション(3-4 節), 観測による量子計算(3-5 節), 量子断熱計算・アニーリング(3-6 節)が理論的なアプローチである。その後, 代表的な実験的アプローチの例として光(3-7 節), 中性原子(3-8 節), イオントラップ(3-9 節), NMR(3-10 節), 半導体中の電子・核スピン(3-11 節), 半導体量子ドット(3-12 節), 超伝導(3-13 節)を用いた量子計算開発を紹介する。

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-1 量子計算理論

(執筆者：西村治道)[2008年4月受領]

量子計算理論では、量子力学の重ね合せの原理を利用した計算（量子計算）によって従来の計算（古典計算）を超えて何ができるか、を計算理論の立場から研究する。本節では、量子計算のモデルとその上で展開される量子計算理論について最新の動向も含めて説明する。

3-1-1 量子計算モデル

(1) 量子回路

量子計算を実現するコンピュータ（量子コンピュータ）が処理する情報は、多くの場合、量子ビット（qubit）と呼ばれる 2 状態系で数学的に表現され、その状態はビット 0 に対応するベクトル $|0\rangle$ とビット 1 に対応するベクトル $|1\rangle$ によって張られる 2 次元複素内積空間 \mathcal{H}_2 上の単位ベクトル $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ の形で表される。 m 個の量子ビットからなる量子状態系は、 \mathcal{H}_2 のテンソル空間 $\mathcal{H}_2^{\otimes m}$ によって表現され、その状態は m ビット列 $x = x_1 x_2 \cdots x_m \in \{0, 1\}^m$ に対応するベクトル $|x\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \cdots \otimes |x_m\rangle$ の線形結合 $|\psi\rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^m} \alpha_x |x\rangle$ によって表される。 $|\psi\rangle$ は 2^m 個という指数オーダーのビット列を重ね合せで表現しており、これらを一度に操作できることが量子計算の能力の源となっている。状態 $|\psi\rangle$ の観測は $\mathcal{H}_2^{\otimes m}$ の正規直交基底 $\{|x\rangle\}$ （計算基底）を用いて表現される。 $|\psi\rangle$ が計算基底のもとで観測されると、確率 $|\alpha_x|^2$ でビット列 x が観測結果として得られる。 $|\psi\rangle$ をなす量子ビットの一部からの情報が必要なときは、それらの量子ビットのみを観測結果の対象とする。例えば、 $|\psi\rangle$ の最初の量子ビットの情報を得るために観測を行うと、0 を得る確率は $\sum_{x \in \{0,1\}^{m-1}} |\alpha_{0x}|^2$ となる。

量子コンピュータの最も代表的な計算モデルは、量子計算の提唱者ドイチ（Deutsch）が導入した量子回路である。量子回路は、複数の量子ビット上からなる複素内積空間 \mathcal{H} 上の作用であり、量子ゲートと呼ばれる決められた次元以下のユニタリ行列の列によって表現される。その際、各量子ビットは量子ワイヤと呼ばれる。量子回路を構成するゲート数を量子回路のサイズと呼ぶ。量子回路 C による計算は次のように進められる。まず、計算したい入力、例えばビット列 x 、に対して初期状態 $|\phi\rangle = |x\rangle \otimes |0^m\rangle$ を準備する。 $|0^m\rangle$ は C での計算に必要な補助の量子ビットの列でアンシラ（ancilla）と呼ばれる。次に、 C を構成する各量子ゲート G_1, \dots, G_k を順作用させていく。各 G_i は量子回路のすべてのワイヤのうち決められた有限個のワイヤ上でのみ作用するため、 \mathcal{H} 上の作用としては $G'_i = G_i \otimes I$ という形のユニタリ行列となる（ I は G_i が作用しない量子ワイヤ上の単位行列である）。結果、 C の作用後の状態は $|\phi'\rangle = G'_k G'_{k-1} \cdots G'_1 |\phi\rangle$ となる。最後に、 $|\phi'\rangle$ を観測することで量子回路の出力を確率的に得る。図 3・1 は量子回路の例である。 M は対応する量子ビットが出力の対象であることを表しており、図 3・1 では最初の量子ワイヤの観測結果が量子回路の出力となる。

任意の古典的な演算が AND と NOT など有限個のゲートで表現できることはよく知られている。任意の量子的な演算はユニタリ行列が複素数値を成分にもつため、有限個の量子ゲートで正確に表現することはできないが、近似的には表現できる。そのような量子ゲートの集合を万能集合と呼ぶ。近似を許す限り、計算量の観点で多くの場合において、万能集合の種類は重要でない。最も簡素な万能集合の例として、 $\{H, T\}$ が知られている。 H は $H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $H|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ で定義される量子ゲートで、アダマールゲート（Hadamard gate）と呼

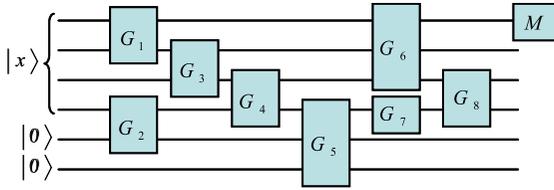


図 3・1 量子回路の例

ばれる． T は $T(|x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle) = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |xy \oplus z\rangle$ (\oplus は排他的論理和) で定義される量子ゲートで、トフォリゲート (Toffoli gate) と呼ばれる．トフォリゲートは古典のゲートとして以前から知られており、 T はそれを自然に量子ゲートとして表現したにすぎない．トフォリゲートは任意の古典的な演算を表現できるので、任意の古典的演算は $\{H, T\}$ からなる量子回路で実行可能である．与えられたユニタリ行列を近似的に表現する (適当な万能集合を基にした) 量子回路のサイズは、近似精度を ϵ とすると、 $\log(1/\epsilon)$ の多項式で押さえられる^{1, 2)} ．

計算すべき問題の多くはビット列全体の集合 $\{0, 1\}^*$ 上の関数で表現されるが、その一方で、固定された量子回路が扱える入力サイズは有限である．従って、問題を解くためには、量子回路は (有限生成的に) 一様な回路の族で考える．ここで、量子回路の族 $\{C_n\}$ が (有限生成的に) 一様であるとは、 C_n が万能集合から構成され、その表現 (例えば二進表現) が n の多項式時間で計算可能であることをいう．必然的に C_n のサイズは n に関する多項式以下となる．関数 f が一様量子回路族 $\{C_n\}$ で計算可能とは、任意の n 及び f の定義域に属する任意のビット列 $x \in \{0, 1\}^n$ に対して、 C_n の入力 x 上での出力が確率 $2/3$ 以上で $f(x)$ であることをいう．

本節では量子回路をユニタリ行列で表現される量子ゲートの列として紹介したが、より一般には、任意の量子力学的操作を量子ゲートとしてもつような量子回路を考えることもできる．そのような量子回路は本節で扱った量子回路で効率的に模倣できることが知られている．近年は量子計算理論の研究者と量子情報理論の研究者の相互参入が進んだ結果、そのような一般的な量子回路モデルもよく用いられている．

(2) そのほかの量子計算モデル

ドイチが最初に導入した量子計算モデルが量子チューリング機械である．量子チューリング機械は、古典の計算理論で代表的なモデルであるチューリング機械の量子版であり、一様量子回路族とは、お互いが任意の精度で効率的に模倣可能という意味で、(多項式時間量の観点において) 計算量的に同等の能力をもつ．同様に、計算量的に同等の能力をもつ計算モデルとして、断熱量子計算モデルや一方向量子計算モデルがある．これらは量子コンピュータをある種の物理系において実現するうえで、より自然な表現が可能な計算モデルとして研究されている．量子回路より計算能力的に劣るがその分だけより簡素な量子計算モデルとして、各種オートマトンモデルの量子版がある．これらは、量子計算と古典計算の違いを明らかにするうえで一時期精力的に研究され、量子ランダムアクセス符号のような有用な理論的ツールを生み出すことに貢献した．量子質問計算量モデルと量子通信計算量モデルについては後に概説する．

3-1-2 量子計算量クラス

計算量クラスとは、ある計算理論的な特性を有した問題の集合を表す概念である。量子計算にまつわる計算量クラスは、しばしば量子計算量クラスと呼ばれる。

(1) BQP

量子計算量クラス BQP (Bounded-error Quantum Polynomial-time の略がクラス名の由来) は、一様量子回路族で計算可能な問題の集合であり、量子コンピュータで高い確率で効率的に解くことが可能な問題全体を表現するものと考えられている。BQP は、計算量クラス P 及び高い確率で効率的に解ける問題のクラス BPP を自然に含み、多項式領域で解ける問題のクラス PSPACE (及びそのサブクラス AWPP) に含まれている。P≠PSPACE であるかどうかは計算理論における長年の未解決問題であり、それゆえに BPP≠BQP の証明は容易でない。しかし、ショア (Shor) のアルゴリズムとその後続研究により、いくつかの BPP に属さないと考えられている代数的構造を有した問題は BQP に属す。更に、BQP が計算量クラス NP 及び高い確率で効率的に「証明」の検証が可能な問題のクラス MA (魔法使いマーリン (Merlin) の主張をアーサ (Arthur) 王が検証する、というのがクラス名の由来) に含まれないという計算理論的根拠 (いわゆる、オラクルによる相対化) も知られている。一方で、BQP が NP ∩ coNP を含むことはないという計算理論的根拠も示されている。グラフ同型性判定問題及び最短格子ベクトルの近似にまつわる問題が BQP に属するかどうかは、アルゴリズムの見地のみならず、計算理論的にも最大の関心事の一つである。近年では、BQP のなかで最も難しい問題である BQP 完全問題の研究が盛んであり、結び目不変量として有名なジョーンズ多項式の近似問題⁴⁾などいくつかの BQP 完全問題が発見されている。

(2) QMA

計算量クラス NP の量子版といえるクラスが QMA (名前の由来は上述の MA の量子版という立場からであるが、このクラスの導入者であるキターエフ (Kitaev) は BQNP と名付けていた¹⁾) であり、BQP とともに現在の量子計算理論において数々の研究対象の中核にあるクラスといえる。形式的には、判定問題 (あるいは 2 値関数) のクラスとして次のように定義される。判定問題 \mathcal{P} が QMA に属するとは、一様量子回路族 $\{C_n\}$ 及び多項式 p が存在して、任意の n に対して、(i) 長さ n の入力 x に対する \mathcal{P} の答え $\mathcal{P}(x)$ がイエスならば、ある量子状態 $|\psi_x\rangle \in \mathcal{H}_2^{\otimes p(n)}$ が存在して、 C_n が入力 $|x\rangle \otimes |\psi_x\rangle$ 上で「イエス」(を表すビット 1) を出力する確率は $2/3$ 以上であり、(ii) 長さ n の入力 x に対して $\mathcal{P}(x)$ がノーならば、どんな量子状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2^{\otimes p(n)}$ に対しても、 C_n が入力 $|x\rangle \otimes |\psi\rangle$ 上で「イエス」を出力する確率は $1/3$ 以下である。(i) における $|\psi_x\rangle$ は、 $\mathcal{P}(x)$ がイエスであることの「量子証明」と考えられ、 C_n は証明が正しいことを確率 $2/3$ 以上で検証できることを意味している。(ii) が意味することは、 $\mathcal{P}(x)$ がノーである場合に、(イエスであることを主張する) どんな「偽の証明」も正しくないことを確率 $2/3$ 以上で検証できることを意味している。誤り確率 $1/3$ は証明の長さ (量子ビット数) を変えることなく、指数的に減少させることが可能である。QMA はやはり PSPACE (及びそのサブクラス PP) に含まれることが知られている。

NP 完全問題の重要性を鑑みれば、QMA 完全問題は BQP 完全問題と同等かあるいはそれ以上に興味深い対象と考えられる。最初に発見され、現在においても最も代表的な QMA 完全問題は k -局所ハミルトニアン問題¹⁾と呼ばれる以下の問題である。

入力: $\mathcal{H}_2^{\otimes n}$ 上のエルミート行列 $H = H'_1 + \dots + H'_m$ 。ただし、各 H'_j は $H'_j = H_j[S_j] \otimes I$ と

表現できて、 $H_j[S_j]$ はサイズ k 以下の集合 $S_j \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ で指定される量子ビットからなる空間上に作用する。

出力： H の最小固有値が $1/3$ 以下ならイエス、 H の最小固有値が $2/3$ 以上ならノー。

この問題は、有名な NP 完全問題である MAX- k -SAT の量子版とみなせる。 $k \geq 2$ のとき、MAX- k -SAT は NP 完全である。 k -局所ハミルトニアン問題は当初、 $k \geq 5$ のときに QMA 完全であることが示され、 $k \geq 2$ のときは未解決であったが、最近になって $k \geq 2$ のときも QMA 完全であることが証明された⁵⁾。一方で、現在知られている QMA 完全問題は物理的な問題だけであり、計算機科学の観点から自然な QMA 完全問題の発見は今後の課題である。

(3) そのほかの量子計算量クラス

古典の計算理論同様に、量子計算理論においても BQP, QMA 以外の数多くの計算量クラスが導入され、そのクラス特有の問題やクラス間の関係などが研究されている³⁾。なかでも精力的に研究されているのが、量子対話型証明 (quantum interactive proof system) に関連するクラスである。量子対話型証明をもつクラス QIP は、QMA の拡張と考えられる。QMA は「証明者」から非対話的に (つまり、一方的に) 与えられた量子証明を「検証者」が効率的に検証するシステムが存在するような問題のクラスとみなせる。QIP は証明者と検証者が量子情報を対話的に送りあうことで検証者が効率的に証明者の主張が正しいかを検証するシステム (量子対話型証明) が存在するような問題のクラスである。古典の対話型証明をもつクラス IP が PSPACE と一致することは、計算理論におけるよく知られた結果である。それゆえ、QIP は自然に PSPACE を含み、PSAPCE に属する言語は量子の対話型証明を持つ。この量子対話型証明は、証明者と検証者の対話の回数が (古典では多項式回の対話回数を要するところを) わずか 3 回に抑えられるという点で古典の対話型証明と大きく異なる。QIP は指数時間で計算可能な問題のクラス EXP に含まれることが知られていたが、ごく最近 QIP が PSPACE にも含まれる、つまり QIP もまた PSAPCE と一致するという報告がなされた⁶⁾。また、証明者が複数であるような量子対話型証明のクラスの研究は、量子情報の非局所性及びエンタングルメントに関する計算理論からのアプローチとして、量子計算及び量子情報の研究者の注目を集めている。近年数多くの興味深い研究成果が得られつつあるが、その計算能力はまだ謎が多い。

3-1-3 量子質問計算量モデルと量子通信計算量モデル

計算量クラスの研究では、 $BPP \neq BQP$ のような明解な結果を得ることは容易でない。一方で、量子質問計算量モデルと量子通信計算量モデルは、量子計算と古典計算とのギャップを明示的に得ることが可能であり、比較的以前から数多くの研究がなされている。

(1) 量子質問計算量モデル

質問計算量モデルでは、問題の入力 $x \in \{0, 1\}^n$ はオラクルという形で与えられる。コンピュータは x の各ビットをオラクルに質問することによって入手し、可能な限り少ない質問回数で x の決められた特性 (例えば x が 1 を含むか否か) を決定する。計算量として必要とされるオラクルへの質問回数 (質問計算量) のみを考え、コンピュータ内部の計算量は考えない。標準的な量子質問計算量モデルは、コンピュータ内部の計算に対応するユニタリ行列とオラクルへの質問に対応するユニタリ行列が交互に並び量子回路の形で表現できて、オラクルへの質問は量子重ね合わせを使って行うことが可能である。代表的な量子アルゴリズムの多

くがこのモデルで表現され得る．例えば，グローバ (Grover) のアルゴリズムは，入力が 1 を含むか否かの量子質問計算量が $O(\sqrt{n})$ であることを意味する．量子質問計算量の上界の研究では，量子ウォークを使ったアルゴリズムや NAND 木に対する量子アルゴリズムなど，新しく興味深い量子アルゴリズムが生み出されている．下界の研究では，多項式法 (polynomial method) 及び量子敵対者法 (quantum adversary method) と呼ばれる 2 種類の下界証明法⁷⁾が開発されている．これらは，量子計算量クラスの研究にも深く関連していて，量子計算の計算量的限界を明らかにするうえで大きな貢献をしてきた．一方で，それぞれに証明法としての限界もあり，更なる改良が探求されている．量子敵対者法はブール関数を表現する論理式のサイズとの密接な関係が示されている．

(2) 量子通信計算量モデル

通信計算量モデルでは，複数のコンピュータが協力して決められたタスクを実現するために必要な通信ビット数 (通信計算量) を計算量の尺度とする (やはり各コンピュータ内部の計算量は考えない)．最も基本的な 2 者間モデルでは，一方のコンピュータが入力 x をもち，もう一方が別の入力 y をもち，2 台のコンピュータが通信することで，関数 $f(x, y)$ の計算などの決められたタスクを行うことを目指す．量子通信計算量モデルでは，通信は量子情報によってなされ，計算量は通信される量子ビット数 (量子通信計算量) によって測られる．コンピュータの台数，通信形態，なすべきタスクの種類などに応じて様々な研究がなされており，量子と古典の間で指数的な通信量のギャップがある問題も発見されている⁸⁾．下界の研究では，従来の手法の量子的拡張に加え，量子情報理論的アプローチが目立つ．しかし，量子質問計算量モデルと比較すると，下界証明法の体系化がそれほどなされておらず，コンピュータ間で事前に量子状態が共有された場合の計算能力などの興味深い未解決問題が残されている．

3-1-4 量子計算理論の古典計算理論への応用

近年の量子計算理論の潮流の一つとして，古典計算理論の結果を得るために量子計算理論の技術を利用する，というものがある．その端緒となったのは，ケレニディス (Kerenidis) とドゥウォルフ (de Wolf) による研究⁹⁾である．彼らは，計算理論や暗号理論に応用をもつ局所復号可能符号 (locally decodable code) の符号長の下界を，量子計算理論的な議論によってそれ以前の結果から指数的に改良した．彼らの結果の後も，最短格子ベクトルの近似に関する問題が $NP \cap coNP$ に入ることや，古典計算量クラス PP の共通部分に関する閉包性の新しい証明などに量子計算理論の技術は貢献している．このことは，量子計算的なものの捉え方が，計算理論的に有用であることを指し示しており，今後更にこの方向の研究が進むと考えられる．

参考文献

- 1) A. Y. Kitaev, A. H. Shen, and M. N. Vyalıy, "Classical and Quantum Computation," Graduate Studies in Mathematics, vol. 47, American Mathematical Society, Rhode Island, 2002.
- 2) M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- 3) J. Watrous, "Quantum computational complexity," to appear in the Springer Encyclopedia of Complexity and Systems Science, arXiv: 0804.3401, 2008.

- 4) D. Aharonov, V. Jones, and Z. Landau, "A polynomial quantum algorithm for approximating the Jones polynomial," vol.55, no.3, pp.395-421, *Algorithmica*, 2009.
- 5) J. Kempe, A. Kitaev, and O. Regev, "The complexity of the local Hamiltonian problem," *SIAM J. Comput.*, vol.35, no.5, pp.1070-1097, 2006.
- 6) R. Jain, Z. Ji, S. Upadhyay, and J. Watrous, "QIP=PSPACE," arXiv: 0907.4737, 2009.
- 7) P. Høyer and R. Špalek, "Lower bounds on quantum query complexity," *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, vol.87, pp.78-103, 2005.
- 8) 谷誠一郎, フランソワルガル, "量子分散コンピューティング," *信学論 (A)*, vol.J90-A, no.5, pp.393-402, 2007.
- 9) I. Kerenidis and R. de Wolf, "Exponential lower bound for 2-query locally decodable codes via a quantum argument," *J. Comput. Syst. Sci.*, vol.69, no.3, pp.395-420, 2004.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-2 量子誤り訂正

(執筆者: 浜田 充)[2008 年 4 月受領]

量子コンピュータの実現のためには、情報をノイズから保護するための何らかの仕組みが必要であるが、そのためには量子誤り訂正符号が有効であると考えられている。特に、本節では古典の線形誤り訂正符号に類似したシンプレクティック符号について解説する。

3-2-1 量子状態の保護

本節で取り扱うのは以下に概観する理論的問題である。有限次元ヒルベルト空間 H に対し H 上の線形作用素全体の集合を $L(H)$ で表す。以下では、特に断らない限り H を 2 次元ヒルベルト空間とする。量子符号 (量子誤り訂正符号, あるいは単に符号) とは $H^{\otimes n}$ の部分空間 C とトレースを保存する完全正線形写像 (completely positive linear map) $\mathcal{R}: L(H^{\otimes n}) \rightarrow L(H^{\otimes n})$ の組 (C, \mathcal{R}) であると定義する。完全正線形写像は量子状態の変化を表す、最も広く受け入れられている一般性のあるモデルである。写像 \mathcal{R} は復号 (recovery operation) の役割を担う。部分空間 C のみも符号と呼ぶことがあるのは古典と同様である。物理的には $H^{\otimes n}$ は 2 準位系を n 個並べたものに対応しており、量子計算の文脈では、量子メモリあるいは量子レジスタとも呼ぶべきものである。部分空間 C は計算に用いられる領域で、この領域が 2^k 次元であれば、 k キュービットの情報がエンコードされているといえる。この符号がどれだけ量子状態を元あった姿に近く保っているかは最小忠実度 (minimum fidelity)

$$F(C, \mathcal{R} \circ \Gamma_n) = \min_{|\varphi\rangle \in C} \langle \varphi | [\mathcal{R} \circ \Gamma_n] (|\varphi\rangle\langle\varphi|) | \varphi \rangle \quad (3.1)$$

や類似の忠実度で評価する [本章 3-2-4 参照]。ここで Γ_n は n キュービットの系に作用するノイズを表す完全正線形写像である。最も良い符号の忠実度を $F_{n,k}^*(\Gamma_n)$ とおこう。すなわち、 $F_{n,k}^*(\Gamma_n)$ を $\log_2 \dim C \geq k$ を満たすような符号 (C, \mathcal{R}) が存在するような $F(C, \mathcal{R} \circ \Gamma_n)$ の最大値 (上限) とする。ここで n は正整数、 k は非負実数とする。

理論的には、量子誤り訂正の一義的な問題は n, k と Γ_n とが与えられたときに $F_{n,k}^*(\Gamma_n)$ とそれを達成する量子符号を求めることといえよう。ただし、実際には忠実度が完全に最適である符号よりも、なるべく広いクラスのノイズ (通信路) Γ_n に適応できる符号の方が望ましいであろう。従って、通信路に依存しない符号の性能指標も有用である。古典の場合と同様、そのようなものとして符号の最小距離が知られている。

3-2-2 量子通信路モデルと量子符号設計

本節で解説するのは、古典の線形誤り訂正符号に類似したシンプレクティック符号あるいはステイビライザ符号と呼ばれる符号である。歴史的には量子誤り訂正符号の具体例は Shor¹⁾ によって初めて提示された。この符号が Calderbank-Shor-Steane 符号^{2,3)} と呼ばれるクラスを経て、シンプレクティック符号^{4,5)} へと一般化されるまでにそれほど時間はかからなかった。

以下に、シンプレクティック符号設計の原理を紹介する。符号は 2 準位系の場合、パウリ (Pauli) 作用素 X, Y, Z と単位作用素 I を用いて定義される。ここで、作用素 X, Y, Z の行

列は順に

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる (i は虚数単位). これらの作用素を次のように $\mathcal{X} = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ で添え字を付けた記号で表すと便利である. すなわち, $(j, k) = (1, 1)$ ならば $N_{(j,k)} = Y = iXZ$, そうでなければ $N_{(j,k)} = X^j Z^k$ とおく. 更に, $\{0, 1\}$ を有限体 (ガロア体) $F = GF(2) = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と見なし, $x = (x_1, \dots, x_n) \in (F^2)^n$ に対して $N_x = N_{x_1} \otimes \dots \otimes N_{x_n}$ と定義する. ここで, x は $((u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)) \in (F^2)^n$ という形をしているが, これを F 上の $2n$ 次元ベクトル

$$x = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \in F^{2n}$$

とってしまうても不都合はない. 今は符号の設計が主眼なので, 誤りを起こす作用素は典型的なものを想定する. すなわち,

$$N_n = \{N_x \mid x \in F^{2n}\}$$

に属する作用素が誤りを起こすと考え. なお, $J \subseteq F^{2n}$ に対して N_J を $N_J = \{N_x \in N_n \mid x \in J\}$ で定義する. この N_n は $L(H^{\otimes n})$ (行列で表せば $2^n \times 2^n$ 行列全体のなす空間) の基底になっている. 実は, 作用素 N_x はパウリ行列としてみなすよりも (一般の $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\}$ に対して) Weyl⁶⁾ が導入した射影表現として見る方が本質を捉えている. そのため, 以降 N_x をワイル作用素と呼ぶ. 現在広く受け入れられている量子誤り訂正の理論では, この対応 $N : F^{2n} \ni x \mapsto N_x \in L(H^{\otimes n})$ のもと量子符号の設計を有限体 F 上の線形符号 (線形部分空間) の設計に帰着させる. 以下, 符号という言葉は量子符号, F 上の線形符号のいずれにも用いる.

今述べた誤りのモデルは正確には次のようなものである. すなわち P を \mathcal{X} 上の確率分布として $\Gamma_n(\rho) = \sum_{x \in \mathcal{X}^n} P_n(x) N_x \rho N_x^\dagger$ なる量子通信路 (パウリ通信路と呼ばれる) を雑音のモデルとする. ただし, これは量子誤り訂正符号がほかの通信路に通用しないということではない. このことは, 古典で二元対称通信路を想定して設計された符号が一般の通信路にも適用可能であることと同様である [本章 3-2-4 参照].

さて, 二つのベクトル $x = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ と $y = (u'_1, v'_1, \dots, u'_n, v'_n) \in F^{2n}$ との間にシンプレクティックな双線形形式 (内積のようなもの)

$$f_{\text{sp}}(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i v'_i - v_i u'_i \quad (3.2)$$

を定めることができるが, この双線形形式 f_{sp} に関する N_n の次の性質が量子力学的ノイズと有限体 F 上の線形符号の接点となる.

$$N_x N_y = (-1)^{f_{\text{sp}}(x, y)} N_y N_x \quad (3.3)$$

集合 N_n の要素はオブザーバブルと呼ばれる物理量であるが, 量子力学の理論により, 交換

可能なオブザーバブルは同時に測定できる。従って、式 (3.3) において $f_{sp}(x, y) = 0$ ならば N_x と N_y は同時測定可能である。これは、複数のオブザーバブルについてもいえる。一方、自己直交な符号は古典の符号理論でよく扱われるが、式 (3.3) の内積についても同様に定義できる。すなわち、 F^{2n} の部分空間 S が

$$\forall x, y \in S, f_{sp}(x, y) = 0$$

を満たすならば、 S は f_{sp} に関して自己直交であるという。あるいは、

$$S^{\perp sp} = \{y \in F^{2n} \mid \forall x \in S, f_{sp}(x, y) = 0\}$$

として $S \subseteq S^{\perp sp}$ を S の f_{sp} の関する自己直交性の定義としても同じである。

シンプレクティック (ステイライザ) 符号の設計は、シンプレクティックな内積に関してこのような自己直交な F^{2n} の部分空間を設計する問題に帰着される。すなわち、シンプレクティック符号は f_{sp} に関して自己直交な S に対して N_S の同時固有空間として定義される。詳しくいえば、次のようになる。

補題 1 4) 線形符号 $S \subseteq F^{2n}$ と集合 $J_0 \subseteq F^{2n}$ が

$$S \subseteq S^{\perp sp} \quad \text{および} \quad \dim S = n - k \quad (3.4)$$

と

$$\forall x, y \in J_0, [x \neq y \Rightarrow y - x \notin S^{\perp sp}] \quad (3.5)$$

を満たしているものとする。このとき

$$J = \{z + w \mid z \in J_0, w \in S\}$$

とおくと

$$\{\psi \in H^{\otimes n} \mid \forall M \in N_S, M\psi = \tau(M)\psi\}, \quad (3.6)$$

という形の互いに直交した $H^{\otimes n}$ の 2^k 次元部分空間が 2^{n-k} 個とれて、これらはいずれも N_J 訂正符号である。ここで $\tau(M)$ はスカラー量であり、従って $M \in N_S$ の固有値である。

ここで N_J 訂正符号という用語の意味は古典の符号理論から類推しても大きな間違いはないが、正確な意味は文献 7)などを参照して頂きたい(ただし、本章 3-2-4 で述べる別の忠実度を用いる場合は文献 7)の定義は必須ではない)。これら 2^{n-k} 個の符号候補の直和は全空間 $H^{\otimes n}$ となることに注意する。ここで、「符号候補」と呼んだのは、これら 2^{n-k} 個の空間が同時に N_J 訂正符号として機能するだけでなく、いずれか一つを選ぶとそれに応じて適当な復号操作 R が決まり N_J 訂正が可能になるからである。通常は、 $C^{(0)}, 0 = (0, \dots, 0) \in F^{n-k}$, を量子符号として選ぶ。

3-2-3 誤りの作用と量子符号の復号

シンプレクティック符号を理解するには古典の標準配列 (standard array) に対応するもの、

すなわちコセットアレイを考えるとよい(図 3・2). また, 古典で加法的に作用する誤りに相当するのが N_n の元であるがその作用を図 3・3 に示した(図 3・2 中 y_i の添え字 i は整数であるが, 図 3・3 ではシンドローム $s \in F^{n-k}$ を 2 進数として表現された整数として扱った). なお, 復号法や訂正の能力において, この量子符号 $C^{(0)}$ は λ 上の古典符号に類似するが, それは S でなく $S^{\pm sp}$ であることに注意する. シンプレクティック符号 $C^{(0)}$ の復号の原理を大まかに述べると次のようになる(図 3・3 参照).

符号 S の基底の元 g_1, \dots, g_{n-k} (古典符号のパリティ検査行列の行に類似) に対して, N_{g_i} を測定した結果 s_i を並べてできる $(n-k)$ -組は古典符号理論の概念を借用してシンドロームと呼ばれる. シンドローム s と 2^{n-k} 個の符号候補 $C^{(s)}$ は 1 対 1 に対応していて, 物理的にも, (N_{g_i}) の観測結果が $s = (s_i)$ であるときに観測直後の物理状態が $C^{(s)}$ のベクトルとなるように対応づけられる. なお, N_{g_i} はパウリ行列(か単位行列)のテンソル積の形をしたオブザーバブルであるから, その観測結果は 1 か -1 であるが, これを $1 \mapsto 0, -1 \mapsto 1$ によって変換したものを観測結果 s_i とする. 復号は標語的にいえば「シンドローム測定 + ユニタリ変換で訂正」と表現できる. 使われた状態は $C^{(0)}$ にあったことが分かっているので, 観測(測定)されたシンドロームに応じて, なんらかの操作で観測後の状態を元の空間 $C^{(0)}$ に戻してやる. 実は, 代数的な考察から, N_n の任意の元は, $C^{(0)}$ を $C^{(s)}$, $s \in F^{n-k}$, のいずれかに移すことが分かるので, 再び古典誤り訂正符号のアイデア(例えば最尤復号)を借用して, 観測されたシンドロームが s のときには, $C^{(0)}$ を $C^{(s)}$ に移す誤り $N_y \in N_n$ のうち「最も尤もらしいもの」 N_x を選んで, ユニタリ変換 N_x^\dagger (今の場合 N_x に等しい)を得られた状態に施してやる. この場合, 補題 1 に現れる J_0 は「最も尤もらしいもの」の集合である. 例えば, コセットアレイを用いて説明すれば各行から最も尤度の高いコセットを選びそれらの和集合が J になるように J_0 を選ばばよい.

3-2-4 発展的話題と補足

量子符号の最適な忠実度の挙動を大まかに掴むためには漸近論が便利である. すなわち, 量子情報理論において, $F_{n,Rn}^*(\Gamma_n) \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) となるような最大の R (正確には R の上限) は量子通信路 (Γ_n) の量子容量と呼ばれているが, これを達成する符号の構成が究極の目標の一つといえよう⁸⁾. 上記のシンプレクティック符号の原理の説明は^{8,9)}に沿ったもので, 必要な証明はそこにある. 歴史的にはシンプレクティック符号の原典は文献 4) あるいは 10) であるが, これらは代数の専門化された分野の言葉で著されている. これらとは独立に文献 5) にも同符号のアイデアが記されている.

符号の良し悪しを表す忠実度としては最小忠実度以外にエンタングルメント忠実度(entanglement fidelity)が知られている¹¹⁾. 漸近論では二つの忠実度は等価とみなせるが, 後者の方が扱いやすい.

シンプレクティック符号は一般的な通信路にも有効である(例えば文献 9)). ここで, 一般的な通信路とはトレイスを保存する完全正写像であるが, よく知られているように完全正写像 $\Gamma_n: L(H^{2n}) \rightarrow L(H^{2n})$ は適当な $L(H^{2n})$ に属する作用素の組 $\{A_i\}$ を用いて

$$\Gamma_n(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger$$

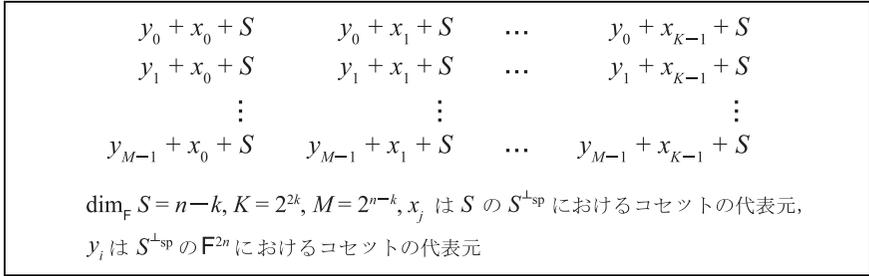


図 3・2 コセットアレイ

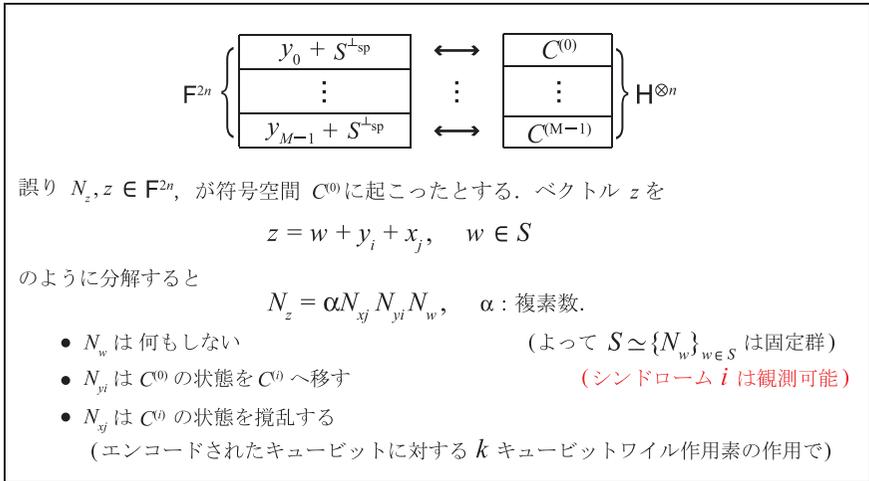


図 3・3 ワイル作用素の符号空間への作用

と表される. 直感的な理解としては, N_n が $L(H^{\otimes n})$ の基底であることが, 様々な $\{A_i\}$ に対処することを可能にしていると考えられる.

参考文献

- 1) P.W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory," Phys. Rev. A, vol.52, pp.R2493-2496, 1995.
- 2) A.R. Calderbank and P.W. Shor, "Good quantum error correcting codes exist," Phys. Rev. A, vol.54, pp.1098-1105, 1996.
- 3) A.M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory," Phys. Rev. Lett., vol.77, pp.793-797, 1996.
- 4) A.R. Calderbank, E.M. Rains, P.W. Shor, and N.J.A. Sloane, "Quantum error correction and orthogonal geometry," Phys. Rev. Lett., vol.78, pp.405-408, 1997.
- 5) D. Gottesman, "Class of quantum error-correcting codes saturating the quantum Hamming bound," Phys. Rev. A, vol.54, pp.1862-1868, 1996.

- 6) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1928. English translation of the 2nd ed., 1931. H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover, 1950.
- 7) E. Knill and R. Laflamme, "Theory of quantum error-correcting codes," Phys. Rev. A, vol.55, pp.900-911, 1997.
- 8) M. Hamada, "Information rates achievable with algebraic codes on quantum discrete memoryless channels," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.51, pp.4263-4277, 2005.
- 9) M. Hamada, "Notes on the fidelity of symplectic quantum error-correcting codes," International Journal of Quantum Information, vol.1, no.4, pp.443-463, 2003.
- 10) A.R. Calderbank, E.M. Rains, P.W. Shor, and N.J.A. Sloane, "Quantum error correction via codes over GF(4)," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.44, pp.1369-1387, 1998.
- 11) B. Schumacher, "Sending entanglement through noisy quantum channels," Phys. Rev. A, vol.54, pp.2614-2628, 1996.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-3 量子アルゴリズム

(執筆者：松本啓史) [2009年2月受領]

量子計算では、量子力学特有の干渉効果を用いて計算のステップ数を減少させることが可能である。その仕組みは以下の三つのグループに分類できる。第一のグループは量子フーリエ変換¹⁾を用いるもので、多くの場合指数または準指数的に既知の古典の(すなわち量子コンピュータでない通常の計算機で走る)アルゴリズムよりも早い。具体例としては、素因数分解¹⁾、離散対数¹⁾、Pell の方程式²⁾などを解く量子アルゴリズムなどがある。これらの問題の困難性が公開鍵暗号などの安全性の根拠として用いられているため、実装されれば大きなインパクトがある。本手法の問題は適応可能な問題が狭いことで、実用性は乏しいものを含めても、さほど多くのアルゴリズムが知られているわけではない。

第二及び第三のグループは、Grover 探索^{3,4)}及び量子酔歩 (quantum walk)⁵⁾と呼ばれるスキームと古典確率アルゴリズムを組み合わせたものである。これらの、応用範囲は極めて広いが、元になる古典確率アルゴリズムの平方根オーダまでしか計算量を減らすことができない(しかし、大規模問題においてはこの差は極めて大きいはずである)。また、第一及び第二の方法論を組み合わせた、量子数え上げアルゴリズム⁴⁾が知られている。

本稿では、まず量子計算の基礎を解説し、これらのアルゴリズムの仕組みを概観する(量子酔歩は割愛)。

3-3-1 量子計算，量子回路

量子コンピュータは、通常の計算機と同じく、プログラムに応じて様々な計算をさせることができる、ユニバーサルな計算機械である。その数学的なモデルは、標準的には量子チューリング機械で与えられるが、ここでは簡単のため量子回路モデルで量子計算を説明する。量子回路では、プログラムも入力も、古典計算と同じくビット列で与えられ、それに応じてある操作を逐次多数の量子ビット (qubit) の列に施していく。量子ビットとは、二つの順位をもつ量子系で、数学的には二次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^2 であり、その標準的な基底を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ とする。従って、 n 個の量子ビットの並びは $\mathbb{C}^{2^{\otimes n}}$ であり、その標準的な基底は長さ n のビット列で指定される: $\{|x\rangle; |x| = n\}$ 。一連の操作を行った後、計算結果が書かれている部分の量子ビットを各々 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ へ射影し、観測結果を読み出す。一般に計算結果はランダムな値をとる。

この計算の途中で行う操作は、あらかじめ入力に依存せずに設定したいいくつかの基本的な操作(ゲート、素子)のなかから選ばなければならない。素子はある有限個の量子ビットにのみ同時に作用でき、その種類は有限個に限る。量子計算を万能にするために必要な基本素子のセットはいくつか異なったものが提案されている。例えば、Shor 基底 (Shor basis)⁷⁾ は Hadamard 変換、 π -位相シフトと呼ばれる 1 量子ビットユニタリ変換

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} (:= H), \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

と 3 量子ビットユニタリである Toffoli ゲートを用いる。Toffoli ゲートは $|110\rangle \rightarrow |111\rangle$, $|111\rangle \rightarrow |110\rangle$ とし、その直交補空間では恒等写像と同様に作用する。これらを組み合わせて、

各量子ビットを $|1\rangle$ または $|0\rangle$ にしておくことによって、ユニバーサルな計算を実現できる。ただし、初期値を $|0^n\rangle$ で固定する場合は上記にくわえて NOT ゲート ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle, |1\rangle \rightarrow |0\rangle$) が必要になる。

アルゴリズムの記述に必要な回路の素子の数を (回路) 計算量という。もちろん、これは採用する基本素子に依存するが、その差はたかだか定数倍でしかない。われわれの興味は、問題のサイズを特徴付けるパラメータ n と計算量の関係、とくに主要項のオーダー O である。計算量が n の多項式のオーダーである場合、そのアルゴリズムは (量子) 多項式時間である、という。古典計算の場合と同じく、回路で定義された多項式時間の概念は、適切な条件を付加すると、量子チューリング機械で定義したものと同等になる^{8,9)}。計算量は、実際の計算機での計算に必要な時間の目安になる。ただし、 n が十分大きくない場合には両者の振る舞いがかなりずれることもありうる。

四則演算をはじめとして、ほとんどの計算の入出力関係は可逆ではない。それを可逆過程であるユニタリ変換で、しかも計算量を著しく増加せずに計算することは自明ではないが、古典可逆計算の結果を援用することで可能である。つまり、すべての計算可能な n ビットから m ビットへの関数 f に対し、

$$U_f : |x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle \quad (3\cdot7)$$

をみたすユニタリ変換 U_f を構成することができる¹⁰⁾。ここで \oplus は、ビットごとの mod 2 での足し算である。

また、古典の確率的アルゴリズムの回路での表現では、素子の動作は決定論的にし入力の一部をランダムビットにするのが慣例である。量子回路でこれを模倣するには、決定論的な演算の部分は式 (3・7) で実現し、ランダムビットは $H|0\rangle$ で置き換える。

3-3-2 量子フーリエ変換とその応用

(1) 量子フーリエ変換

以下で、 n ビットの列 $i = i_1 i_2 \cdots i_n$ を時折断りなく、二進整数だと解釈する。量子フーリエ変換とは、 QFT_n とは n 量子ビット上のユニタリ変換で、

$$QFT_n : |i\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi}{2^n} ik} |k\rangle$$

であって、 $O(n^2)$ の計算量を要する¹⁾。しかし、近似的な実現でよければ、線形時間で実行できる¹¹⁾。

(2) 関数の周期¹⁰⁾

整数 $x \in \{0, 1, \dots, N\}$ からビット列 (長さ m) への写像 f が与えられ、 $f(x) = f(x + \lambda)$ をみたす λ を求めたい。ただし、ここで $+$ は mod N の意味であり、 f は周期のなかでは一对一、つまり

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x + \lambda = x'$$

であることを仮定する。より正確には、変換 U_f をブラックボックスとして与えられ、関数

の様々な性質を使うことができないとする．古典計算で、同じく関数がブラックボックスとして与えられた場合、この問題を解くにはすべての入力について f を計算せざるを得ない．つまり、 f を N 回計算しなければならない．一方、次の量子アルゴリズムを用いると、 $O(n)$ 回 f を評価すれば済む．以下では簡単のため、 $N = 2^m$ の場合を説明する．

- (i) n 量子ビット、 m 量子ビットのレジスタを準備し、 $|0^n\rangle|0^m\rangle$ に初期化する
- (ii) Hadamard 変換を第一レジスタの各量子ビットに施し、 U_f を行い、 $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle |f(x)\rangle$ を得る
- (iii) QFT_n を第一レジスタに施し、 $\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi}{2^n} xk} |f(x)\rangle$ を得る
- (iv) 第一レジスタの各ビットを標準的な基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で観測する．すると、ビット列 k を観測する確率は

$$\Pr\{k\} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{h=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi}{2^n} yk} \left(\sum_{x=0}^{2^n-1} \langle f(x+y) | f(x) \rangle \right)$$

- (v) (i)-(iv) を $O(n)$ 回繰り返し、得られた $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots$ から λ を計算する

(v) での λ の計算方法は、 $\Pr\{k\}$ が $F(y) := \sum_{x=0}^{2^n-1} \langle f(x+y) | f(x) \rangle$ のフーリエ変換である事実から導き出される：仮定から、 $F(y)$ の周期は λ であるので、 $\Pr\{k\}$ は $k\lambda/2^n$ が整数であるところだけ、非 0 の値をとる．そこで、連立方程式 $k^{(1)}\lambda = k^{(2)}\lambda = \dots = 0 \pmod{2^n}$ から λ を求めることができる．

N が 2 のべきでない場合には、 $N \ll 2^n$ となる n を選んで上記と同じアルゴリズムを走らせればよい．

(3) 素因数分解¹⁾

上記のアルゴリズムの重要な応用として、素因数分解を説明する．今、 N を素因数分解するとき、 $f_a(x) \equiv a^x \pmod{N}$ とする． $f_a(x)$ の周期 r が偶数であるなら、ある整数 c に対して、

$$a^r - 1 = (a^{\frac{r}{2}} - 1)(a^{\frac{r}{2}} + 1) = cN$$

が成立する．よって、 $\gcd(a^{\frac{r}{2}} - 1, N)$ または $\gcd(a^{\frac{r}{2}} + 1, N)$ は N を割り切る．ゆえに次のアルゴリズムで N を割り切る整数を効率的に見つけることができる．

- (i) a をランダムに選ぶ
- (ii) $f_a(x)$ の周期 r を計算し、それが奇数であれば (i)、偶数であれば (ii) へ進む
- (iii) $\gcd(a^{\frac{r}{2}} - 1, N)$ 、 $\gcd(a^{\frac{r}{2}} + 1, N)$ をユークリッドの互除法で求める

正解を出すのにかかる平均のステップ数は $O(\log N)^3$ である．古典計算では、素因数分解は準指数時間かかるので、それに比べると著しい加速である．

(4) 隠れ部分群問題

群 G から整数への関数 f が部分群 H を隠す、とは

$$f(h \circ g) = f(g), \forall g \in G \iff h \in H$$

が成立することである．隠れ部分群問題とは、 f がブラックボックスとして与えられたときに、 H を求める問題である．特に群 G が $|G| < \infty$ の可換群である場合には、関数の周期を求める場合と類似のアルゴリズムで解くことができる¹²⁾．典型的な例として、離散対数問題がある．これは、与えられた整数 a, b, c に対して $a^x \equiv b \pmod{c}$ をみたく x を見つける問題であって、その困難性が公開鍵暗号の安全性の根拠として用いられている．そのほか、いくつかの自然な問題が可換隠れ部分群問題の特殊例として知られている．

G が非可換な場合の例としては、グラフ同型問題やグラフ自己同型問題が対称群の隠れ部分群問題に帰着することが知られているほか、二面体群の隠れ部分群問題が整数格子の最短ベクトル問題や最近傍格子点問題と深い関係があることが分かっている．アルゴリズムについては、可換群と同じ量子フーリエ変換を用いるものと、量子フーリエ変換の非可換版を用いるものがあり、いくつかの G について、多項式時間アルゴリズムが知られている^{13, 14)}．しかし、一般論はもちろん、二面体群、対称群の場合は未解決である．特に対称群の場合については悲観的な議論が多い¹⁵⁾．

3-3-3 Grover 探索に基づいた振幅増幅

n ビットから 1 ビットへの関数 f が与えられ、 $f(x) = 1$ をみたく x を見つける問題を探索問題という．この形に定式化できる問題は多くある．例えば、素因数分解は f を x が n 割り切る場合にのみ 1 を返す関数とした場合にあたる．仮に f が多項式時間で計算できたとしても、探索問題を解くには一般に膨大な計算量が必要である．例えば、素朴に x をランダムに選んで試していく方法では、 $O(2^n)$ の計算量が必要である．そして、解の存在を判定する問題が NP 困難である場合、多くの工夫にもかかわらず、古典・量子ともに指数時間かかるアルゴリズムしか知られていない．ただし、量子の場合は古典に比べて指数を著しく改善できる．そのための重要なツールが Grover 探索^{3, 4)} である．

いま、古典アルゴリズム A を用いて解を確率 p で取り出すことができる、すなわち $O(1/p)$ 回の繰り返しで解を取り出すことができるとする．そして、古典アルゴリズム A を (初期状態 $|0^n\rangle |0^1\rangle$ から出発して) 実現する量子回路を A とする．すなわち、決定論的な部分は式 (3.7) を用い、初期値が 1 またはランダムである入力に関しては、各々入力の最初に NOT または H を配したものである．出力は第一レジスタに書き出すものとする．そして、 $(|x\rangle; |x| = n, f(x) = 1)$ で張られる線形空間への射影を P とすると、 $\|P \otimes \mathbf{1} A |0^n\rangle |0^1\rangle\|^2 = p$ である．単純なランダムサンプリングでは $p = 1/2^n$ であるが、重要な問題においては様々な工夫でよりよいアルゴリズムが知られている．例えば、3SAT においては Shoening のアルゴリズムによって $p = (4/3)^n$ を $3n$ の計算量で実現できる¹⁶⁾．

また、式 (3.7) を用いて $\tilde{U}_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle$ をみたくユニタリ変換 \tilde{U}_f を構成できることが知られている． U_0 を $U_0 |0^n\rangle = |0^n\rangle, |0^1\rangle$ に直行する任意のベクトル $|u\rangle$ に対して $U_0 |u\rangle = -|u\rangle$ をみたくユニタリ変換とし、 $Q := A (U_0 \otimes \mathbf{1}) A^{-1} (\tilde{U}_f \otimes \mathbf{1})$ の繰り返しを考える．すると、

$$\left\| P \otimes \mathbf{1} Q^t A |0^n\rangle |0^t\rangle \right\|^2 = \left| \cos \left\{ (2t+1) \cos^{-1} \sqrt{p} \right\} \right|^2 \quad (3\cdot 8)$$

であることが確かめられる．従って， $t = t_* := \left\lfloor \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2 \cos^{-1} \sqrt{p}} - 1 \right\} \right\rfloor$ とすれば，第一レジスタの各量子ビットを $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で測って 1 に近い確率で $f(x) = 1$ をみたく x を観測値として得る．通常 p は非常に小さいので， $t_* = O\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)$ であり，古典のサンプリングの繰返し回数の平方根と同じオーダーになっている．アルゴリズム全体の計算量はこれに各ステップの計算量かけたものに，前後の処理にかかる計算量（これはほぼ無視できる）を足したものである．

上では p を既知としたが，通常はその値は未知であって，従って t_* も未知であることが多い．古典的なサンプリングの場合，その回数を大きく取りすぎることは問題がなかった．しかし式 (3·8) より明らかなように，Grover 探索の場合， t の値が大きすぎると解を得る確率が下がってしまう．そこで，次のようなアルゴリズムを考える¹⁷⁾ と， $O(t_*) = O\left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right)$ 程度の繰返しでアルゴリズムは終了し， p が未知であることは計算量に本質的には影響しないことが知られている．

(i) $s = 1$

(ii) t を s 以下の正整数のなかからランダムに選ぶ

(iii) $Q^t A |0^n\rangle |0^t\rangle$ の第一レジスタの各量子ビットを $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で測り， x を得る

(iv) もし $f(x) = 1$ ならば終了．そうでなければ s を $\min\left\{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right)s, 2^{n/2}\right\}$ に変更して (ii) へ

Grover 探索は非常に広範囲の古典アルゴリズムと相性がよく，適用範囲が極めて広い．一方，計算量の改善は平方根程度に止まっている．このことは否定的に語られることが多いが，しかし指数時間アルゴリズムのように計算量が膨大である場合，この改善は決して無視できないはずである．例えば 3SAT の場合，Shoening のアルゴリズムと Grover 探索の組み合わせの計算量は $O(4/3)^{n/2} = O(1.154\dots)^n$ であり，古典の現在の最善のアルゴリズム¹⁸⁾ の $O(1.32\dots)^n$ よりかなりよい．

3-3-4 量子数え上げアルゴリズム⁴⁾

ある条件をみたく要素の数を数える問題を数え上げという．これは， n ビットから 1 ビットへの関数 f について， $f(x) = 1$ をみたく x の数を評価する問題に書き換えることができる．数え上げのためには， A を一様サンプリングに対応する量子回路 ($l = 0$, $A = H^{\otimes n}$) として， $\|PA|0^n\rangle\|^2 = p$ が評価できればよい．簡単のために $p = \cos^2\{\pi/2(2t_* + 1)\}$ と，2進表示で m 桁の整数 t_* を用いてかけたとしよう．すると， $\|PQ^t A |0^n\rangle\|^2$ は t の周期 t_* の正弦関数である．そこで，関数の周期を求めるのとほぼ同様の次のアルゴリズムで求めることができる．

(i) $|0^m\rangle A |0^n\rangle$ を準備する

- (ii) Hadamard 変換を第一レジスタの各量子ビットに施し、全体にユニタリ変換 $|x\rangle|\varphi\rangle \rightarrow |x\rangle Q^x |\varphi\rangle$ を施す．結果として、 $\frac{1}{2^{m/2}} \sum_{x=0}^{2^m-1} |x\rangle Q^x A |0^n\rangle$ を得る
- (iii) QFT_m を第一レジスタに施し、 $\frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{x=0}^{2^m-1} e^{i\frac{2\pi}{2^m} xk} |k\rangle Q^x A |0^n\rangle$ を得る
- (iv) 第一レジスタの各ビットを標準的な基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で観測する．すると、観測結果 k を得る確率は

$$\Pr\{k\} = \frac{1}{2^m} \sum_{y=0}^{2^m-1} e^{i\frac{2\pi}{2^m} yk} \langle 0^n | A^\dagger Q^y A | 0^n \rangle$$

- (v) (i)-(iv) を $O(n)$ 回繰り返し、得られた $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots$ から t_* を計算する

(v) での t_* の計算は、 $\Pr\{k\}$ が $F(y) := \langle 0^n | A^\dagger Q^y A | 0^n \rangle$ のフーリエ変換であることを用いる．一般の p の場合、 m を大きくするほど精度がよくなる．ただし、 Q^{2^m} を計算する部分が計算量の大部分を占めるので、計算量もそれに依じて指数的に増加する．

参考文献

- 1) P.W. Shor, "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer," SIAM J. Comput., vol.26, no.5, pp.1484-1509, 1997.
- 2) S. Hallgren, "Polynomial-time Quantum Algorithms for Pell's Equation and the Principal Ideal Problem," Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp.653-658, 2002.
- 3) L. Grover, "A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search," Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp.212-219, 1996.
- 4) G. Brassard, P. Hoyer, M. Mosca, and A. Tapp, "Quantum Amplitude Amplification and Estimation," Quantum Computation and Quantum Information, A Millennium Volume, AMS Contemporary Mathematics Series, vol.305, 2002.
- 5) A. Ambainis, "Quantum walks and their algorithmic applications," Int. J. Quantum Inf., vol.1, pp.507-518, 2003.
- 6) G. Brassard, P. Hoyer, and A. Tapp, "Quantum Counting," Proc. of 25th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP'98), LNCS 1443, pp.820-831, 1998.
- 7) A. Kitaev, "Quantum computations, algorithms and error correction," Russ. Math. Surv., vol.52, no.6, pp.1191-1249, 1997.
- 8) H. Nishimura and M. Ozawa, "Computational complexity of uniform quantum circuit families and quantum Turing machines," Theoretical Comput. Sci., vol.276, nos.1-2, pp.147-181, 2002.
- 9) A. Yao, "Quantum circuit complexity," Proc. 34th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.352-361, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1993.
- 10) M. Nielsen and I. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," Cambridge University Press, 2000.
- 11) R. Cleve and J. Watrous, "Fast parallel circuits for the quantum Fourier transform," Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp.526-536, 2000.
- 12) M. Mosca, "Quantum Computer Algorithms," Ph.D. thesis, University of Oxford, 1999.
- 13) M. Grigni, L.J. Schulman, M. Vazirani, and U. Vazirani, "Quantum Mechanical Algorithms for the Nonabelian Hidden Subgroup Problem," Combinatorica, vol.24, no.1, pp.137-154, 2004.
- 14) O. Regev, "Quantum Computation and Lattice Problems," SIAM J. Comput., vol.33, no.3, pp. 738-760, 2004.

- 15) C. Moore, A. Russell, and L.J. Schulman, "The Symmetric Group Does Strong Fourier Sampling," Proceedings of the 46th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp.479-490, 2005.
- 16) U. Schoening, "A probabilistic algorithm for k-SAT and constraint satisfaction problems," Proceedings 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, pp.410-414, 1999.
- 17) M. Boyer, G. Brassard, P. Hoyer, and A. Tapp, "Tight bounds on quantum searching," Fortschritte Der Physik, vol.46, nos.4-5, pp.493-505, 1998.
- 18) D. Rolf, "Improved Bound for the PPSZ/Schoening-Algorithm for 3-SAT," J. Satisfiability, Boolean Modeling Computation, vol.1, pp.111-122, 2006.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-4 量子シミュレーション

(執筆者: Tim Byrnes・宇都宮聖子)[2008年5月受領]

1982年, リチャード・ファインマンは, 量子多体問題を効率よく解くための手法として, 量子コンピュータを提案した¹⁾. 量子多体問題を従来の計算機を使って解くと, 通常, 時間・空間的リソースが指数的に増加してしまう. これらの問題を解決するために, 様々な近似法(量子モンテカルロ, 密度行列繰り込み群: DMRG, 動的平均場理論: DMFT, など)が研究されてきたが, どれも一長一短で, あらゆる問題に対して適用できる手法ははまだ見つからない. 特に有限次元で2次元以上のフェルミ粒子系の量子多体問題を扱うことができる数値法の発見は困難を極めている. そこでファインマンは, 現在のコンピュータを構成している古典物理ではなく, 量子力学そのものを計算に利用することで計算を高速化することを考案した. これまでファインマンの提案に基づいて, 量子コンピュータを使った様々な量子多体問題を効率的にシミュレートする手法が提案されてきた. 通常の量子コンピュータのゲートモデルを用いるアルゴリズムを使って, スピン・ボソン粒子・フェルミオン粒子・格子ゲージ理論などを効率的にシミュレートできることが知られている²⁾⁻⁶⁾. これらの手法を用いて従来の計算機を指数的に高速化をすることは, 理論的には可能であるが, 量子コンピュータの実現と同様に, デコヒーレンス・スケラビリティ・キュービット操作におけるエラーなどの問題から, 実現は困難とされている⁷⁾.

量子シミュレーションとは, 一般的に量子物性の原理を用いて量子多体問題を解くことを指す⁸⁾. 量子シミュレーションについてのコミュニティの興味は, 量子コンピュータを用いた“デジタル型”量子シミュレーションから, ある量子多体系のハミルトニアンをもとと含んだシステムを実装するタイプの, “アナログ型”量子シミュレーションへと移ってきている. これまで“アナログ型”量子シミュレーションとして最も成功した実験例として, グライナーらによる, 光格子にトラップされた冷却原子を用いたボーズ・ハバードモデルの量子シミュレーションがある⁹⁾. この実験では, 光格子の光強度を大きくしていくことで, 冷却原子の超流動状態からモット絶縁体への量子相転移を示した.

この節では, 半導体デバイスを用いたハバードモデル量子シミュレーションについて, 特にフェルミ粒子の系に絞って解説する. 本節では詳しく述べないが, 半導体デバイスを用いたボーズハバードモデルの量子シミュレーションとしては, 半導体マイクロキャピティ励起子ポラリトンを用いた例があげられる¹⁰⁾. 半導体は, 何十年にもわたって開発されてきたナノ加工技術を使って多体系物理の構造をつくり込むことができる, 非常に扱いやすいシステムである. また, シミュレートする対象の物理系と同様に, 長距離クーロン相互作用を利用できるという特色もある. 光格子中の冷却原子などほかの物理系を用いて調べた結果とは独立に, 同じ量子多体問題の問題に半導体デバイスを用いた結果と比較することで, シミュレーションの解が個々の物理系に依存する特性ではなく, 量子多体問題そのものに起因する特性であるということを調べることができる.

(1) 半導体デバイスを用いたハバード・ハミルトニアンの実現

図3-4はフェルミ・ハバードモデルの量子シミュレーションの構造を表している. 網状にした表面ゲートとバックゲートのあるホールパー構造のGaAs/AlGaAsのヘテロ構造を用いる. ハバードモデルを実現するためには, 不純物ができるだけ少なくするように変調ドープ

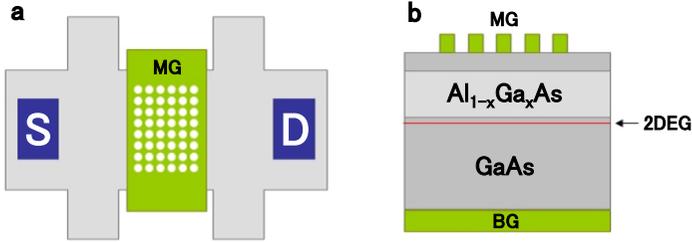


図 3-4 フェルミ・ハバードモデルの量子シミュレータのデバイス図

デバイス表面のメッシュゲート (MG) に電圧をかけることで 2 次元電子ガス (2DEG) に規則的なポテンシャルを与えることができる。バックゲート (BG) はシステムのケミカルポテンシャルをコントロールする。ホールパー構造は電子密度を測定するためのもので、ソース (S)・ドレイン (D) のオーミック電極を用いて、MG の影響を受けた 2DEG のコンダクタンスを測定することができる。

のかかったシステムではなくアンドープシステムを用いることが重要である。網状のゲートは 2 次元電子ガス層に周期 λ の周期ポテンシャルを形成する。2 次元電子ガスを多体系として取り扱おうと、

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\sigma m m' j j'} \mathcal{T}(m, m', j, j') c_{jm\sigma}^\dagger c_{j'm'\sigma} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sigma \sigma' \\ m_1 m_2 m_3 m_4 \\ j_1 j_2 j_3 j_4}} \mathcal{U}(j_1, j_2, j_3, j_4, m_1, m_2, m_3, m_4) \\
 &\times c_{j_1 m_1 \sigma}^\dagger c_{j_2 m_2 \sigma'}^\dagger c_{j_3 m_3 \sigma'} c_{j_4 m_4 \sigma}, \quad (3-9)
 \end{aligned}$$

のマルチバンドのハバードモデルが形成される^{11, 12)}。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(m, m', j, j') &= \int d^2 x w_m^*(x - x_j) H_0(x) w_{m'}(x - x_{j'}) \\
 \mathcal{U}(j_1, j_2, j_3, j_4, m_1, m_2, m_3, m_4) &= \int d^2 x \int d^2 x' w_{m_1}^*(x' - x_{j_1}) w_{m_2}^*(x - x_{j_2}) \\
 &\quad \times U_C(x, x') w_{m_3}(x - x_{j_3}) w_{m_4}(x' - x_{j_4}) \\
 H_0(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 + V_0 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} y\right) \right]
 \end{aligned}$$

このとき、 $c_{jm\sigma}$ は、 $m_x, m_y \geq 1$ におけるバンド $m = (m_x, m_y)$ ・サイト j ・スピン σ の生成演算子である。 $w_m(x - x_j)$ は、バンド m ・サイト j ・ポテンシャル振幅 V_0 のワニア関数で、 $U_C(x, x')$ は電子間のクーロン反発力である。一般的に、2 次元電子ガス内の電子は表面ゲートの影響により、スクリーニングを受ける。ハミルトニアン式 (3-9) は、ゲート電圧を固定しながらバックゲート電圧を変調していく手法で、ソース・ドレイン電極を介してゼロバイアスの微分コンダクタンスから特性を調べることができる。コンダクタンス特性を理解するために、単純なモデルとして式 (3-9) での最低エネルギーバンドである、式 (3-10) のハバ-

ドモデルを考える．

$$H = t \sum_{\sigma(j,j')} c_{j\sigma}^\dagger c_{j'\sigma} + \epsilon \sum_{\sigma j} c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}, \quad (3 \cdot 10)$$

ここで近傍のサイト j と j' の間のトンネル係数は $t = \mathcal{T}(m, m, j, j')$, ケミカルポテンシャルオフセットは $\epsilon = \mathcal{T}(m, m, j, j)$, バンド $m = (1, 1)$ についてサイト当たりの反発力 $U = \mathcal{U}(j, j, j, j, m, m, m, m)$, そして個数演算子 $n_{j\sigma} = c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma}$ として定義される．図 3・5(a) は, $\lambda = 0.1 \mu\text{m}$ ・スクリーニング距離 $d = 10 \text{ nm}$ のときのハバード・パラメータを示している (詳細は文献 11, 12) を参照のこと) . このとき U/t ポテンシャル振幅 V_0 によって変わり得る.

図 3・5(a) によると U/t はスクリーニングの効果を取り入れても 1 より小さくはならない．しかし, 電子数が増えると状態はより高いエネルギーバンドに遷移し, 図 3・5(b) のようにトンネル振幅が大きくなっていく．この理由はより高いエネルギーをもった電子について, その平均速度 $v_k = \frac{1}{\hbar} \nabla_k \epsilon(k)$ もやはり大きくなる, ということに起因する．よって V_0 を固定した状態で電子密度を上げると, U/t は減少する． U と t が同じオーダのときに金属 - モット絶縁体の相転移が観測できることが知られているため, このデバイスにおいて, 最低エネルギーのハバードバンドでは相転移を観測することは難しいとされる．しかし高い電子密度のもとでは, フェルミレベルの近くにいる電子は運動エネルギーが優勢な状態となり, ポテンシャル V_0 が上昇するとクーロン反発力が優勢な状態になる．

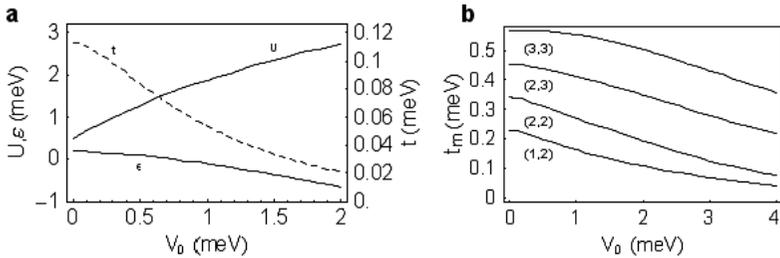


図 3・5 (a) $\lambda = 0.1 \mu\text{m}$, スクリーニング距離 $d = 10 \text{ nm}$ のときのハバードパラメータ． U : 一つのサイト当たりのクーロン反発力 (実線・左軸), ϵ : ケミカルポテンシャルオフセット (実線・左軸), t : トンネル振幅 (破線・右軸) . (b) m 番目のバンドのトンネル振幅

文献 13) の手法を用いて, ケミカルポテンシャル μ やポテンシャル V_0 に対応した $\mathcal{G} = \frac{d\langle N \rangle}{d\mu}$ を計算することができる．ハミルトニアン式 (3・10) の $U \cdot t \cdot \epsilon$ は図 3・5(a) のように V_0 の関数として計算し, それに基づいて \mathcal{G} を 2×3 サイトの系で計算する． \mathcal{G} が非零のとき電子数はケミカルポテンシャルに依存して変化する．図 3・5(a) における \mathcal{G} のピークは, それぞれのサイトに電子が一つずつ加えられる境目で, ケミカルポテンシャルが上昇するにつれて, サイト当たりの電子の数が $n = 0, 1, 2$ と変化する．“V” 形状のピークの分裂は単一の量子ドットで見られるクーロンブロッケード効果に起因しているが¹⁵⁾, ケミカルポテンシャルが

ブロッケードエネルギーを超過するときコンダクタンスのピークを与える．“V” 形状のなかの領域がモット絶縁体となり，“V” の字の鋭角部分には，ハバードモデルの金属相と一致する伝導体領域がある．実際には式 (3・9) に表されるようにたくさんのバンドが存在し，それぞれのハバードバンドが“V” 形状に連なってコンダクタンス特性を示すが，ここでは単一ハバードモデルのみを考慮している^{16, 17, 18)}．これらにおいて，ケミカルポテンシャルに依存したコンダクタンスの振動が観測されているが，はっきりとした金属 - 絶縁体の量子相転移はこれまでのところ確認されていない．

(2) ハバードモデルの実装における課題

実際の実験系では，不純物の存在や，結晶成長における界面の欠陥，表面の金属ゲート蒸着の不完全性などにより，電子の実効的なポテンシャルは空間的に不均一になる．これは無秩序を表す不均一ケミカルポテンシャルの項をハミルトニアン式 (3・10) に追加することで表される．

$$H_{\Delta} = \sum_{\sigma j} \Delta_j c_{j\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} \quad (3\cdot11)$$

ここで Δ_j は $[-\Delta, \Delta]$ の範囲でランダムに分配される．一般的にトンネル振幅 t_j は空間的に変化するが，今は $U \gg t$ の場合のみ考えるため，この効果は無視することにする．図 3・6(b) は，無秩序の効果式 (3・11) を $\Delta = 0.5 \text{ meV}$ としてシステムに取り入れた結果である．一般的には無秩序があることでピークの決定が難しくなる．

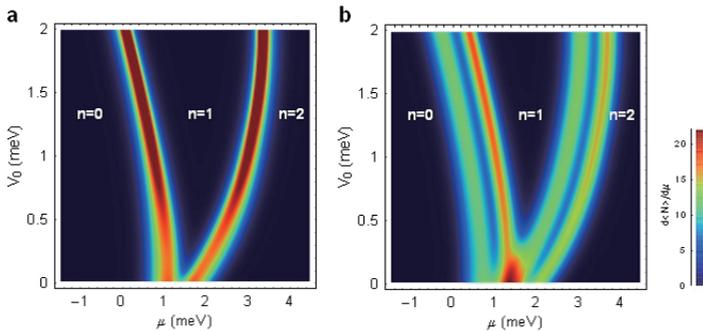


図 3・6 $T = 1.2 \text{ K}$ ， $\lambda = 0.1 \mu\text{m}$ において，ケミカルポテンシャルを μ ，ポテンシャル振幅を V_0 としたとき，(a) 無秩序パラメータ $\Delta = 0 \text{ meV}$ (b) $\Delta = 0.5 \text{ meV}$ の二つの場合について $G = \frac{d\langle N \rangle}{d\mu}$ をプロットした． n は一つのサイト当たりの電子数を表し， G のピークは電子密度が変化する領域に対応する．“V” 形状のそれぞれのアームのストライプ状の特徴は，小規模の格子数で計算をしたことによるものである

コンダクタンスの振動は一般的に無秩序パラメータ Δ が U よりも小さいときに生き残る．図 3・6(b) の結果を与える計算は，フォノンのように外場からのデコヒーレンスを考慮していない，単一でコヒーレントなハミルトニアンによって記述される全格子を仮定している．このような効果を取り入れるためには，パーコレーション効果などを考慮する必要がある¹⁹⁾．

図 3・5 に見られるような金属と絶縁体の相図をつくることは、ハバードモデルの量子シミュレーションにおける最初の目的である。ハバードモデルには様々な磁性や伝道特性をもった相が存在することが知られており、そのようなあらゆる相を観測して相図を完成させることを最終の目的としている。発現が予期されている特に興味深い相に、ハバードモデルで存在すると考えられている d 波の超伝導相がある。このような相を発見するにはクーバー対電荷 $2e$ の観測のために、磁気キャパシタンスの振動周期の測定をすることが有効であるとされる¹²⁾。ハバード・ハミルトニアンにおいて系を低エネルギー状態にするために、十分低温で実験を行う必要がある。反強磁性相の観測には $k_B T \approx 0.1t$ 、 d 波の超伝導相の観測には $k_B T \approx 0.02t$ 程度の冷却が必要となるため²⁰⁾、図 3・5 の t のオーダーと、現在の希釈冷凍機で冷却できる範囲 ($T = 10$ mK まで) から、二つの相は観測可能な範囲にあることが分かる。ただし、このような相を発見するためには現在のデバイスよりも無秩序ポテンシャル ($\Delta = 0.1 - 1$ meV 程度) を下げる必要があり、それが現在の実験的な難しさを代表している。

参考文献

- 1) R.P. Feynman, Int. J. Theo. Phys., vol.21, p.467, 1982.
- 2) S. Lloyd, Science, vol.273, p.1072, 1996.
- 3) G. Ortiz, J.E. Gubernatis, E. Knill, and R. Laflamme, Phys. Rev. A, vol.64, p.022319, 2001.
- 4) R. Somma, G. Ortiz, J.E. Gubernatis, E. Knill, and R. Laflamme, Phys. Rev. A, vol.65, p.042323, 2002.
- 5) R. Somma, G. Ortiz, E. Knill, and J.E. Gubernatis, arXiv: quant-ph/0304063.
- 6) T. Byrnes and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A, vol.73, p.022328, 2006.
- 7) M.A. Nielsen and I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, 2000.
- 8) I. Buluta and F. Nori, "Science," vol.326, p.108, 2009.
- 9) M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, Nature, vol.415, p.39, 2002.
- 10) C.W. Lai, N.Y. Kim, S. Utsunomiya, G. Roumpos, H. Deng, M.D. Fraser, T. Byrnes, P. Recher, N. Kumada, T. Fujisawa, and Y. Yamamoto, Nature, vol.450, p.529, 2007.
- 11) T. Byrnes, P. Recher, N.Y. Kim, S. Utsunomiya, and Y. Yamamoto, "Phys. Rev. Lett.," vol.99, p.016405, 2007.
- 12) T. Byrnes, N.Y. Kim, K. Kusudo, and Y. Yamamoto, "Phys. Rev. B," vol.78, p.075320, 2008.
- 13) S. Sachdev, Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press, 1999.
- 14) C.A. Stafford and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett., vol.72, p.3590, 1994.
- 15) L.P. Kouwenhoven, D.G. Austing, and S. Tarucha, Rep. Prog. Phys., vol.64, p.701, 2001.
- 16) K. Ismail, W. Chu, A. Yen, D.A. Antoniadis, and H.I. Smith, Appl. Phys. Lett., vol.54, p.460, 1989.
- 17) L.P. Kouwenhoven, F.W.J. Hekking, B.J. van Wees, and C.J.P.M. Harmans, Phys. Rev. Lett., vol.65, p.361, 1990.
- 18) R.J. Haug, J.M. Hong, and K.Y. Lee, Surf. Sci., vol.263, p.415, 1992.
- 19) Y. Meir, Phys. Rev. Lett., vol.83, p.3506, 1999.
- 20) W. Hofstetter, Phys. Rev. Lett., vol.89, p.220407, 2002.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-5 観測による量子計算モデル

(執筆者：三宅章雅)[2008年6月受領]

この章では、観測による量子計算モデル、特に2001年にRaussendorfとBriegelによって開発された一方向量子計算(One-way quantum computation¹⁾,*)について概説する。

3-5-1 観測による量子計算モデル

観測による量子計算モデルの最大の特徴は、量子計算の標準モデルである量子回路モデルにおいて観測は計算結果の読み出しにのみ寄与するのと対照的に、計算過程自体が観測のみにより実行される点にある。量子回路が「決定論的で可逆な」ユニタリ演算により量子計算を遂行する一方、観測は必然的に「ランダムな出力に伴い非可逆な」振る舞いをするので、量子計算とは何かを問う際に、大きな概念上の進展となった。

観測による量子計算モデルは大まかに2種類、量子テレポーションをする際に量子演算も同時に遂行する量子ゲートテレポーションモデル²⁾と、ここで主に解説する一方向量子計算モデルに分けられる。両者の間の最大の差異は、前者がエンタングルメントを生成できる2量子ビット上のBell測定を利用するのに対して、後者は計算を開始する以前に必要なエンタングルメントをすべて一括生成し、1量子ビットの個別測定のみを計算過程に利用する点にある。ここでは簡明のため、観測はフォン・ノイマン型の射影測定で記述されるとする。量子回路モデルとの量子計算モデルとしての計算能力・計算効率のうえでの形式的等価性は、以下のように量子回路モデルの万能計算のための基本演算ゲートをシミュレートできることで示されている。

3-5-2 一方向量子計算モデル

一方向量子計算は二段階、(1)クラスタ状態³⁾と呼ばれるエンタングルメントの生成過程、(2)量子ビットの個別測定による計算過程、からなる。

(1) クラスタ状態とグラフ状態

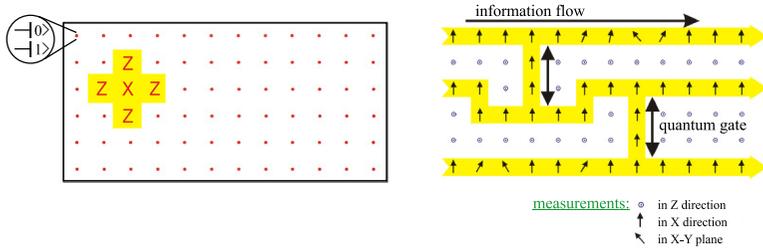
必要とされるエンタングルメント資源はクラスタ状態であり、次の連立固有方程式を満たす唯一の同時固有状態である。

$$K^{(a)}|\Phi\rangle_C = |\Phi\rangle_C \quad \forall a \in C. \quad \text{ここで} \quad K^{(a)} = \sigma_x^{(a)} \prod_{b \in N_a} \sigma_z^{(b)}, \quad (3 \cdot 12)$$

は相関演算子と呼ばれるスタビライザ演算子であり、 N_a は格子点 a の最近接格子点の集合とする。通常どおり、 σ_α ($\alpha = x, y, z$) はパウリ演算子を表す。 C は相互作用の空間パターンを記述するグラフ依存することを意味し、クラスタ状態の場合は2次元正方格子である。

2次元格子を一般に任意のグラフに拡張した際に、上記同様にして定義される状態はグラフ状態⁵⁾と呼ばれる。クラスタ状態に加えて、Greenberger-Horne-Zeilinger状態(通称:シュレディンガーの猫状態)や量子誤り訂正符号の状態など量子情報処理で応用が知られている

* 「一方向」の名前は、観測が非可逆過程であるため量子回路モデルと違い単純に計算過程を逆行することができないことに由来するようである。

図 3.7 一方向量子計算の枠組み¹⁾

(Copyright C 2001 by the American Physical Society)

(左図) 2次元正方形格子上に相関演算子 $K^{(a)}$ で記述される量子相関をもつクラスタ状態を生成する。
 (右図) 目的の量子アルゴリズムに対応して量子ビットごとに個別測定を行うことで、量子回路をシミュレーションすることができる

多くの多体量子状態がグラフ状態であることが知られている。

クラスタ状態は、ダイナミカルに次のように生成できる。任意のグラフ状態も同様の処方方で、相互作用のパターンを2次元格子から対応するグラフに置き換えることで生成できることに注意しておく。2次元格子上のすべての量子ビットを σ_x 方向に偏極させる、 $|+\rangle_C = \bigotimes_{a \in C} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 。次に均質にすべての最近接の2量子ビット間に制御位相ゲートを作用させる、

$$U(\pi) = \exp \left[-i\pi \sum_{(a,b)}^{\text{n.n.}} \frac{\mathbf{1} - \sigma_z^{(a)}}{2} \frac{\mathbf{1} - \sigma_z^{(b)}}{2} \right] = \prod_{(a,b)}^{\text{n.n.}} (\mathbf{1} - 2|11\rangle\langle 11|) \quad (3 \cdot 13)$$

実際これは、時間依存の Ising 型の2体相互作用 $H_{\text{int}} = -\frac{1}{4} \sum_{(a,b)}^{\text{n.n.}} \sigma_z^{(a)} \sigma_z^{(b)}$ を時間 $t = \pi$ の期間だけ作用させるのに対応する。

クラスタ状態

$$|\Phi\rangle_C = U(\pi)|+\rangle_C \quad (3 \cdot 14)$$

が式(3.12)を満たすことは、ハイゼンベルグ描像で初期状態の $\sigma_x^{(a)}$ が $U(\pi)\sigma_x^{(a)}U^\dagger(\pi) = K^{(a)}$ と各々の格子点 $a \in C$ で時間発展することから確認できる。数量子ビットの場合を例に以上のようにして生成できるクラスタ状態を実際書き下してみるの、とても理解の助けになると思われる。

(2) 計算過程

量子計算は、クラスタ状態 $|\Phi\rangle_C$ の各量子ビットを \vec{n} 方向に2値射影測定 $\{P^{(a)}(\vec{n}, s)\}$ を施すことで遂行される。ここで、

$$P^{(a)}(\vec{n}, s) = \frac{1}{2} \left[\mathbf{1} + (-1)^s \vec{n}^{(a)} \cdot \vec{\sigma}^{(a)} \right] \quad (3 \cdot 15)$$

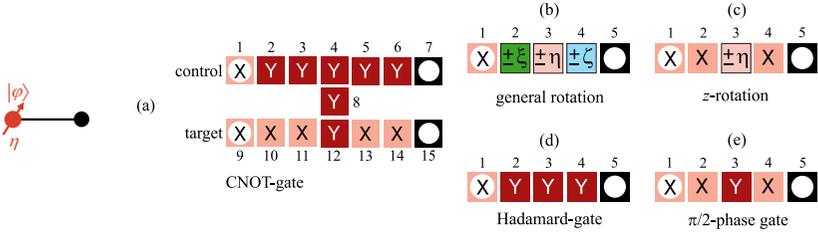


図 3-8 (左図) 一方向量子計算の素過程 . (右図) 基本演算量子ゲートの実行例⁴⁾

(Copyright C 2003 by the American Physical Society)

- (a) CNOT ゲート . (b) オイラー角 (ξ, η, ζ) による一般の $SU(2)$ 回転ゲート . (c) z 軸回りの η 回転ゲート .
- (d) Hadamard ゲート . (e) $\pi/2$ 位相ゲート

$s = 0, 1$ は 2 値観測結果に相当し、実際 $P(\vec{n}, s)$ は観測量 $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ の各々 $(-1)^s$ 固有状態への射影演算子である . つまり一方向量子計算では、計算過程はクラスタ状態に順次射影演算子を適用することで実行される点に注目されたい .

重要な点は、なぜこのようにしてユニタリ時間発展 (量子回路モデル) がシュミレートできるのか? また特に観測結果のランダム性に依存せずどのようにして量子計算の結果を確率 1 で得ることができるのかを納得することにある . 答えを先に要約すると、量子アルゴリズムが万能計算の基本演算ゲートで記述されているとするなら、対応する測定方向 $\{\vec{n}^{(a)}, \forall a \in C\}$ を計算開始以前にクラスタ上に割り当て、実際順次測定する際に以前の観測結果によって現在の観測方向を「簡潔に順応」(adapted) させることで目的の量子アルゴリズムを確率 1 で計算できる .

さて、クラスタ状態がもつ量子相関が (一部分系の観測のもと) 量子演算をもたらすことを説明する . 文献 1), 4) に見られる元来の説明は、式 (3-12) のスタビライザー演算子の変化の観点からなられていたが、ここでは著者が好む相対状態 (以下式 (3-16)) の観点から説明する .

一方向量子計算の「素過程」(図 3-8 左) は、量子ビット 1 を $|\varphi\rangle$, 2 を通常どおり $|+\rangle$ に準備したうえで制御位相ゲートを適用されることで得られる状態、いうなら「2 量子ビットのクラスタ断片」を $\vec{n} = (\cos \eta, \sin \eta, 0)$ に沿って測定する、つまり Bloch 球上を xy 平面に含まれる直交基底 $|\pm, \eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm e^{i\eta}|1\rangle)$ への射影測定する過程と考えられる . つまり、以下に述べる様々なゲート演算もこの素過程の適切な積み重ねから得られることが分かる . ここで、制御位相ゲートはすべて可換なのでこのような断片化した解析が可能なのを注意しておく .

例えば直接計算することで、

$$|\varphi\rangle^{(1)} \mapsto \sigma_x^{s_1} H R_z(\eta) |\varphi\rangle^{(2)}, \tag{3-16}$$

が分かる . ここで、 $R_z(\eta) = |0\rangle\langle 0| + e^{-i\eta}|1\rangle\langle 1|$, これは全体位相を別にして $\exp(-i\frac{\eta}{2}\sigma_z)$ なので z 軸に対する回転操作に相当し、 $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$ は Hadamard 行列と呼ばれる . 式 (3-16)

は、量子ビット 1 の観測角 η での測定により「量子ビット 1 にあった（未知）入力状態 $|\varphi\rangle$ は量子ビット 2 に移りユニタリー演算 $\sigma_x^{s_1} HR_z(\eta)$ が施される」と読む。特に、因子 $\sigma_x^{s_1}$ は観測結果 s_1 に依存する（つまり $s_1 = 1$ のときのみ非自明に存在し、 $s_1 = 0$ のときは $\sigma_x^0 = \mathbf{1}$ とみなす）ので、副産物（byproduct）演算子と呼ばれる。実際 2 通りの観測結果は等確率で起こる。ここで注目すべきは、 xy 平面での観測角 η に対応して、角度 η だけ z 軸の回転を施せる点である。

さて、任意の 1 量子ビットゲート操作 $U \in SU(2)$ は、三つのオイラー角 (ξ, η, ζ) を用いて $U = R_x(\zeta)R_z(\eta)R_x(\xi)$ と一意に分解できるのを思い出す。例えば、図 3・8 右 (b) が実際これに与えることは上述した素過程を 4 回組み合わせることで理解できる。一列に制御位相ゲートで繋がった 5 量子ビットからなるクラスタ断片に左から順次観測角 $0, \xi, \eta, \zeta$ と xy 平面内で測定する過程を考える。 $\sigma_x = H\sigma_z H^\dagger$, $R_x(\eta) = HR_z(\eta)H^\dagger$ に注意すると、

$$\begin{aligned} & [\sigma_x^{s_4} HR_z(\zeta)] [\sigma_x^{s_3} HR_z(\eta)] [\sigma_x^{s_2} HR_z(\xi)] [\sigma_x^{s_1} HR_z(0)] |\varphi\rangle \\ &= [\sigma_x^{s_4} HR_z(\zeta)] [\sigma_x^{s_3} HR_z(\eta)] \sigma_x^{s_2} \sigma_z^{s_1} HR_z((-1)^{s_1} \xi) H |\varphi\rangle \\ &= [\sigma_x^{s_4} HR_z(\zeta)] \sigma_x^{s_3+s_1} \sigma_z^{s_2} HR_z((-1)^{s_2} \eta) R_x((-1)^{s_1} \xi) |\varphi\rangle \\ &= \underbrace{\sigma_x^{s_4+s_2} \sigma_z^{s_3+s_1}}_{\Upsilon} R_x((-1)^{s_3+s_1} \zeta) R_z((-1)^{s_2} \eta) R_x((-1)^{s_1} \xi) |\varphi\rangle. \end{aligned} \quad (3\cdot17)$$

この過程は観測結果 s_1, s_2, s_3, s_4 によってそれぞれ異なるユニタリー演算が適用された状態を量子ビット 5 に生成している。しかし注目すべきは、量子ビット 1 を観測角 0 で測定した後、もし仮に各々ランダムな観測結果に依存して引き続き観測角を量子ビット 2 から順次 $(-1)^{s_1} \xi, (-1)^{s_2} \eta, (-1)^{s_3+s_1} \zeta$ と順応させたならば、副産物 Υ を別にして観測結果に依存せず $U = R_x(\zeta)R_z(\eta)R_x(\xi)$ を適用したことに相当する点である。図 3・8 右の \pm はこの観測角の順応を含意している。観測結果のランダムネスとその副産物 Υ の存在は、説明されたように順応された観測角によって順次 Υ が先送りされることによって、計算過程にはまったく無害であることに注意されたい。副産物 Υ の影響は、量子回路の最終読取り段階（一般に計算基底での観測）で観測結果を読み替えて補うことができることが分かる。

万能計算を遂行するには加えて 2 量子ビットゲートが必要であるが、これは CNOT を図 3・8 右 (a) のようにしてシミュレートしたり、クラスタ状態に既に内在する制御位相ゲートを直接利用することで得られる。各量子アルゴリズムに対応したグラフ構造に不用な量子ビットは、 z 軸方向の測定 ($\vec{n} = (0, 0, 1)$) によって、正方格子に付随した初期のクラスタ状態 $|\Phi\rangle_C$ から除去できる。興味ある量子アルゴリズムの観測角パターン例を図 3・9 に示す。

3-5-3 物理系での実装と展望

一方向量子計算モデルにおけるエンタングルメント資源生成過程と観測による計算過程の分離の特徴は多くの場合制御上の利点があり、量子コンピュータ実装の観点からも有望なモデルである。詳しくは述べないが、量子誤り符号を量子回路同様に用いることにより、誤り耐性（fault-tolerance）をもつ一方向量子計算があるノイズ閾値以内で可能なことが理論上示されている⁶⁾。よって、量子コンピュータ実装の候補と考えられているほとんどの物理系において、実装の理論提案はなされている。詳しくは関係他記事を参照されたい。

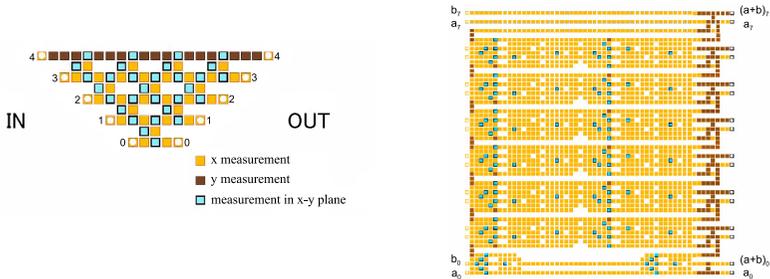


図 3・9 量子アルゴリズムを実行する観測角パターン例⁴⁾

(Copyright C 2003 by the American Physical Society)

(左図) 5 量子ビット状態の量子フーリエ変換演算 . (右図) 二つの 8 量子ビット状態間の量子加算演算

2008 年春現在, 実験による一方向量子計算の「原理の検証」は既にいくつかの物理系で成功している. 特に線型光学系⁷⁾では, 4 量子ビットのクラスタ状態を生成し Grover のアルゴリズムなどが実演された. 更に近年, 当初課題だった観測結果をフィードフォワードして次の観測角を順応させる, 一方向量子計算を確率 1 で成功させるための鍵となる素早い観測手法の実装にも成功している. 今後の進展は, 量子ビットの数をどのように効率的に増やせるかという拡張性にかかっていると思われる.

また, 光学格子に捕捉された中性冷却原子による実装も有望である. モット絶縁体相を活用することにより光学格子の各くぼみに単一原子を格納した後, 冷却原子間の制御衝突により一括して制御位相ゲートを適用できるのが利点であり, 文献 8) では 10 万個程度の原子からなる 3 次元クラスタ状態が生成できたと考えられている. ただし, 格子間隔が狭いため一方向量子計算に必要な不可欠な各格子点上の単一原子に選択的に観測を行うことにはここ数年の重要課題であり, 計算過程自体はまだ実演されていない.

最後に, 一方向量子計算に見られるように, 量子状態に内在する量子相関が観測による量子計算のために活用できる資源であるという知見は, 量子情報がもたらした物性に対する新しい認識である. クラスタ状態に限らずどのような量子状態が一方量子計算のために利用できるか, また物性物理全般で研究されている著しい性質を示す量子状態 (特に基底状態など) のなかにそのような「天然資源」があり得ることが近年理解され始めたことは興味深い進展である⁹⁾.

参考文献

- 1) R. Raussendorf and H.J. Briegel, Phys. Rev. Lett., vol.86, p.5188, 2001.
- 2) D. Gottesman and I. Chuang, Nature, vol.402, p.390, 1999. M.A. Nielsen, Phys. Lett. A, vol.308, p.96, 2003.
- 3) H.J. Briegel and R. Raussendorf, Phys. Rev. Lett., vol.86, p.910, 2001.
- 4) R. Raussendorf, D.E. Browne, and H.J. Briegel, Phys. Rev. A, vol.68, p.022312, 2003.
- 5) M. Hein, J. Eisert, and H.J. Briegel, Phys. Rev. A, vol.69, p.062311, 2004; D. Schlingemann, Quant. Inf. Comp., vol.4, p.287, 2004.

- 6) R. Raussendorf, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians University München (2003); M.A. Nielsen and C.M. Dawson, Phys. Rev. A, vol.71, p.042323, 2005; P. Aliferis and D.W. Leung, Phys. Rev. A, vol.73, p.032308, 2006; R. Raussendorf, J. Harrington, and K. Goyal, Ann. Phys., vol.321, p.2242, 2006; R. Raussendorf, J. Harrington, and K. Goyal, New. J. Phys., vol.9, p.199, 2007.
- 7) P. Walther, et al., Nature, vol.434, p.169, 2005; R. Prevedel, et al., Nature, vol.445, p.65, 2007; M.S. Tame, et al., Phys. Rev. Lett., vol.98, p.140501, 2007; K. Chen, et al., Phys. Rev. Lett., vol.99, p.120503, 2007; G. Vallone, et al., Phys. Rev. Lett., vol.100, p.160502, 2008; Y. Tokunaga, et al., Phys. Rev. Lett., vol.100, p.210501, 2008.
- 8) O. Mandel, et al., Nature, vol.425, p.937, 2003.
- 9) F. Verstraete and J.I. Cirac, Phys. Rev. A, vol.70, p.060302(R), 2004; M. Van den Nest, A. Miyake, W. Dür, and H.J. Briegel, Phys. Rev. Lett., vol.97, p.150504, 2006; D. Gross and J. Eisert, Phys. Rev. Lett., vol.98, p.220503, 2007; G.K. Brennen and A. Miyake, Phys. Rev. Lett., vol.101, p.010502, 2008.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-6 量子断熱計算・量子アニーリング

(執筆者：西森秀稔)[2008年4月受領]

量子断熱計算は、量子計算の新たなパラダイムとして近年盛んに研究されている。量子アニーリングは、量子効果を利用した最適化問題の汎用アルゴリズムであり、量子断熱計算と本質的に同じアイデアに基づいている。本節では、量子断熱計算・量子アニーリングの基本的な考え方を解説する。

3-6-1 組合せ最適化問題と量子計算

量子計算理論の主要な目標は、古典的な最適化問題の高速解法アルゴリズムを、量子力学の原理に基づいて構成することにある。通常の量子計算の枠組みでは、量子ビットの組からなる入力に対して、ゲート(素子)においてユニタリ変換を逐次的に作用させていき、最終的に得られた量子ビットの組に観測をかけて出力を取り出す。これに対して、量子断熱計算ないし量子アニーリングでは、時間に依存した制御変数をもつハミルトニアンを用意し、シュレディンガー方程式に従って系の状態を連続的に変化させる。そして、最終的に得られる状態(波動関数)が、高い確率で元の最適化問題の解を表現しているよう、初期状態や時間に依存したハミルトニアンを設計するのである。

量子断熱計算¹⁾と量子アニーリング²⁾は、ほぼ同じ時期に独立に提案された、本質的に同じ発想の手法である。前者では、計算量の問題サイズ依存性に研究の視点が置かれることが多いのに対し、後者では、古典的なシミュレーテッド・アニーリングとの比較検討が盛んになされてきた。本節では、特に区別する必要がない限り、両方をまとめて QA/QAE (Quantum annealing/Quantum adiabatic evolution) と記すことにする。

伝統的な量子計算の枠組みでは、解を高い確率で得るのに必要なユニタリ変換の数(ゲートの数、ステップ数)が、問題の大きさとともにどう増大するかが計算量の目安になる。これに対して QA/QAE では、所期の最終状態に到達するまでの時間の長さが考察の対象となる。

QA/QAE が最近注目を浴びているのにはいくつか理由がある。伝統的なゲートの枠組みでは、外界との相互作用による系の乱れ(デコヒーレンス)の影響をどれだけ抑えることができるかが、量子計算の成功の鍵となる。本質的にミクロな世界である量子系を特定の状態のまま乱れなしに保ち、更に能動的な制御を施すことは実験的に極めて難しい課題であり、多大な努力がなされている。量子誤り訂正符号などの技術が開発されているが、その実現に必要なオーバーヘッドは重く、模索が続いている。一方、QA/QAE で利用する基底状態は、各種の擾乱に対して比較的安定である。例えば温度効果(熱擾乱)については、基底状態と第一励起状態間のエネルギーギャップと比較して温度が十分低い限り無視できる。

また、最適化問題の古典的な汎用アルゴリズムであるシミュレーテッド・アニーリング(simulated annealing: SA)と QA/QAE (特に QA) との比較もいろいろな角度から行われており、QA の優位性を示す理論やデータが数多く提示されている²⁾。

計算量に関して、ゲートを用いた従来の枠組みと QAE の等価性も証明されている³⁾。片方のアルゴリズムは、多項式時間のオーバーヘッドを除いてもう一方に翻訳できるという意味において、同じ問題に対して両者は同等の計算量をもっているのである。

3-6-2 基礎理論

(1) 最適化問題のハミルトニアン表現

まず、解くべき古典的な最適化問題をハミルトニアン H_0 で表現する。基底状態が最適解になるよう H_0 を選ぶのである。最終状態として古典的な最適化問題の解ではなく、より一般的な量子力学的波動関数を求める問題も考えられるが、ここでは扱わない。

例えば、 N 個の項目のなかから特定の 1 個を探すデータベース探索問題では、項目を $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle$ で表し、 H_0 を

$$H_0 = I - |w\rangle\langle w| \quad (3\cdot 18)$$

とすればよい。 $|w\rangle$ が目的の項目であり、 I は N 次元の単位行列である。解を表現する状態 $|w\rangle$ が H_0 の基底状態になっている。また、統計力学でよく知られたスピングラスの基底状態を求める問題では、ランダムな相互作用をもつイジング模型を採用する。

$$H_0 = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z \quad (3\cdot 19)$$

和は、適当な格子上の隣同士の格子点の組について取る。 σ_i^z は、格子点 i に割り当てられたパウリスピン の z 成分である。

(2) 量子揺らぎ

H_0 の基底状態を求めるために、量子力学的な揺らぎを用いて状態探索を行うのが QA/QAE の基本戦略である。そこで、 H_0 と非可換な H_1 を導入し、全ハミルトニアンを時間の関数として

$$H(t) = \frac{t}{T} H_0 + \left(1 - \frac{t}{T}\right) H_1 \quad (3\cdot 20)$$

とする。 T は計算時間であり、 $t = 0$ で $H(0) = H_1$ 、 $t = T$ で $H(T) = H_0$ になる。初期ハミルトニアン H_1 の基底状態が容易に見つかるように H_1 を選ぶことが重要である。

H_1 の基底状態を初期状態に選び、 $H(t)$ で記述される系を時間に依存したシュレディンガー方程式に従って時間発展させる。 T が十分大きければ時間発展はゆっくりであり、量子力学の断熱定理が適用できる。すると、系の状態は H_1 の基底状態から始まって、最終的には H_0 の基底状態に到達し、最適化問題が解けるのである。

QA では、式 (3·20) の代わりに

$$H(t) = H_0 + \Gamma(t) H_1 \quad (3\cdot 21)$$

とする定式化も多い。初期状態においては制御変数 Γ を十分大きく選んで系が H_1 だけで記述されるようにしておき ($H(0) \approx \Gamma(0) H_1$)、 Γ を時間とともにだんだん小さくしていき、最終的に 0 にもっていく ($\Gamma(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow H_0$, $t \gg 1$) ののである。この場合も、 H_1 の基底状態から出発して十分長時間の後には、 H_0 の基底状態である最適解に到達することを目指す。

例えば、式 (3·18) の H_0 で表されるデータベース探索問題では、すべての状態間の量子力学的遷移を同じ重みで許す

$$H_1 = I - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N |j\rangle \quad (3\cdot22)$$

がよく用いられる．解 $|w\rangle$ を知らなくても， H_1 の基底状態は $|\psi_0\rangle$ であることはすぐ分かる．これが初期状態となる．また，式 (3\cdot19) のスピングラスでは，横磁場 (x 方向にかけた磁場) を表す演算子

$$H_1 = - \sum_i \sigma_i^x \quad (3\cdot23)$$

を選ぶことが多い． H_1 の基底状態は， $\{\sigma_i^z\}_i$ を対角化する表示ですべての状態を等確率で足し上げた自明な状態

$$\prod_i \frac{|+\rangle_i + |-\rangle_i}{\sqrt{2}} \quad (3\cdot24)$$

である．ここで， $|\pm\rangle_i$ は $\sigma_i^z|\pm\rangle_i = \pm|\pm\rangle_i$ なる状態である．

(3) 断熱変化

ハミルトニアン $H(t)$ は時間変数 t にあらわに依存する．そのため各時刻における系の状態 $\psi(t)$ は，定常状態のシュレディンガー方程式の解とは異なる．しかしながら， T が十分大きくて系が断熱的に変化しているとみなせる場合には， $\psi(t)$ は， t を固定されたパラメータとする定常状態のシュレディンガー方程式

$$H(t)|j\rangle_t = E_j(t)|j\rangle_t, \quad (E_0(t) < E_1(t) \leq E_2(t) \leq \dots) \quad (3\cdot25)$$

の基底状態 $|0\rangle_t$ に十分近い ($|\langle\psi(t)|0\rangle_t| \approx 1$) ．

各時刻における定常状態のエネルギー固有値 $E_j(t)$ は， t の関数とみなすことができる (図 3\cdot10) ．系のサイズが有限のとき，たいいていの場合において基底状態は縮退しておらず，第一励起状態との間にエネルギーギャップ $\Delta_t = E_1(t) - E_0(t)$ をもつ．断熱定理によれば，式 (3\cdot20) の $H(t)$ で系を時間発展させた後に， $t = T$ で最適解 $|0\rangle_T$ に十分近い状態に行き着く条件 $|\langle\psi(T)|0\rangle_T|^2 = 1 - \epsilon^2$ ($\epsilon \ll 1$) は

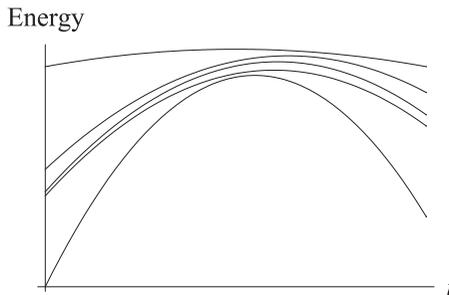


図 3\cdot10 定常エネルギー固有値の t 依存性の模式図

$$\frac{\max_t |\langle 1 | \partial_t H(t) | 0 \rangle_t|}{\min \Delta_t^2} = \epsilon \left(\partial_t H(t) = \frac{dH(t)}{dt} \right) \quad (3 \cdot 26)$$

である． \max と \min は $0 \leq t \leq T$ の間で評価する．

式 (3・20) によると，上式の分子は $\frac{1}{T}$ に比例する．よって，

$$T \propto \frac{1}{\epsilon \min \Delta_t^2} \quad (3 \cdot 27)$$

が満たされるように T を選べば，高い確率で正解に行き着くことになる．エネルギーギャップ Δ_t が小さいと，状態変化の途中で基底状態から励起状態に遷移する確率が増えるので， T を大きく取ってゆっくりと系を制御しなければならないのである．また， ϵ を小さく取って最後の波動関数が正解である確率を高めようとするとき，それに応じて T を大きく取らねばならない．

多くの問題において，最小のエネルギーギャップ $\min \Delta_t$ は系のサイズに対して指数関数的に小さくなる．このとき，最適化問題の解を高い確率で得るための計算時間 T は，式 (3・27) によると系のサイズに対して指数関数的に増大し，問題は困難になる．

(4) シミュレーテッド・アニーリングとの比較

QA において，ハミルトニアンを式 (3・21) のように選んだとき，断熱条件式 (3・26) は制御変数 $\Gamma(t)$ に対する微分方程式を与える．汎用最適化アルゴリズムとしての QA の性能評価のために，一般の系に対してエネルギーギャップや行列要素を最悪評価した後に $\Gamma(t)$ の微分方程式を解いてみる．そうすると， t が 0 から十分大きな値に変化するにつれて， $\Gamma(t)$ が t のべきで減衰する ($\Gamma(t) \propto t^{-c}$) と，ほぼ確実に正しい解に行き着くことが示される⁴⁾．

一方，古典的な汎用最適化アルゴリズムである SA では，一般の系において，温度 T を時間 t の関数として $T(t) \propto c / \log t$ のように減衰させると，十分な長時間の後に最適解に到達することが証明されている*． $\Gamma(t) \propto t^{-c}$ と $T(t) \propto c / \log t$ を比べると，前者の方が制御変数をより高速に減少させている．この意味において，QA が SA より高速なアルゴリズムであることがいえる．

3-6-3 応用例

式 (3・18) の H_0 と式 (3・22) の H_1 から構成されるハミルトニアン式 (3・20) を使って，データベース探索問題を解くことにする⁵⁾．このハミルトニアンは単純な形をしており，すべてのエネルギー固有値を求めることができる．基底状態と第一励起状態との間のエネルギーギャップは

$$\Delta_t = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right)} \quad (3 \cdot 28)$$

である．このエネルギーギャップは $t = \frac{T}{2}$ で最小値 $\min \Delta_t = \frac{1}{\sqrt{N}}$ を取る．よって式 (3・27)

* 温度と計算時間を同じ T で表してあるので，混同しないようにしていただきたい．

より、計算時間は N に比例する。これは、一つずつ順番に探していく古典的な探索と同じ計算量である。

ところで、エネルギーギャップが小さいときに励起状態への遷移が起きやすいことを考えると、 $t=0$ から $t=T$ までずっと同じ速さでハミルトニアンを変化させていくのではなく、ギャップが小さいところだけでゆっくり動かせば、効率が上がるものと思われる。そこで、一樣な変化を表す式 (3・20) の代わりに、初期条件 $f(0) = 0$ 及び終端条件 $f(T) = 1$ を満たす単調増加関数を導入して

$$H(t) = f(t)H_0 + (1 - f(t))H_1 \quad (3\cdot29)$$

としてみる。そして、 $0 \leq t \leq T$ 全体での最悪評価 (式 (3・26)) の代わりに、各時刻で断熱条件を課して

$$\frac{|\langle 1 | \partial_t H(t) | 0 \rangle_t|}{\Delta_t^2} = \epsilon \quad (3\cdot30)$$

とする。この式は $f(t)$ に対する微分方程式を与えるから、それを解くことにより各時刻での最適な制御法が決まる。その結果によると、 $f(t)$ はギャップが最小になる $t = \frac{T}{2}$ 付近で変化が緩やかになり、計算時間 T は \sqrt{N} に比例する。古典的な計算量 N に比べて小さくなるのである。グローバのアルゴリズムとして知られる、量子計算の伝統的な枠組みでのデータベース探索アルゴリズムの計算量と同等になったのである。

また、特に QA については、具体的な最適化問題における SA の比較が多数報告されている²⁾。ほとんどすべての場合に、SA に比べて高速になることが示されている。

QA 及び QAE の実験的な実現も試みられている。前者では、ランダムさをもつ磁性体で低温の状態に達するのに、QA に相当する磁場・温度制御の方が SA に相当する方法より確実に平衡状態に行き着けることが示されている⁶⁾。後者では、3 量子ビット系に対して NMR を用いて実験を行い、MAXCUT と呼ばれる最適化問題を表現する状態を実現した。この系に QAE に相当する制御を施して、解が得られることを示している⁷⁾。QA/QAE による量子計算の実現に向けて、理論的・実験的な研究が更に続けられている。

参考文献

- 1) E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, and M. Sipser, arXiv: quant-ph/0001106, 2000.
- 2) T. Kadowaki and H. Nishimori, Phys. Rev. E, vol.58, p.5355, 1998; A. Das and B.K. Chakrabarti, Quantum Annealing and Related Optimization Methods, Springer, 2005; G.E. Santoro and E. Tosatti, J. Phys. A, vol.39, p.R393, 2006.
- 3) A. Mizel, D.A. Lidar, and M. Mitchell, Phys. Rev. Lett., vol.99, p.070502, 2007.
- 4) S. Morita and H. Nishimori, J. Phys. Soc. Jpn., vol.76, p.064002, 2007; R.D. Somma, C.D. Batista, and G. Ortiz, Phys. Rev. Lett., vol.99, p.030603, 2007.
- 5) J. Roland and N.J. Cerf, Phys. Rev. A, vol.65, p.042308, 2002.
- 6) J. Brooke, D. Bitko, T.F. Rosenbaum, and G. Aeppli, Science, vol.284, p.779, 1999.
- 7) M. Steffen, W. van Dam, T. Hogg, G. Breyta, and I. Chuang, Phys. Rev. Lett., vol.90, p.67903, 2003.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-7 光を用いた量子計算

(執筆者：竹内繁樹)[2008年8月受領]

量子情報の担体は様々提案されているなか、光子は、重ね合せ状態を長時間保てること、量子状態の長距離伝送(100 km 超)が可能であることから、とりわけ鍵となる量子である。本稿では、光子を用いた量子情報技術の核となる、量子状態操作の方法と現状について解説する。

3-7-1 光子を用いた量子計算の概説

一般に、量子状態制御は、「量子ビットとそれに対する量子ゲート操作」という量子コンピュータの枠組みで捉えることができる。量子ゲートには、一つの量子ビットを操作するゲート、及び二つの異なる量子ビット間のゲートが必要になる。ただし、光子は真空中で相互作用しないため、この2量子ビット間のゲートの実現は非常に困難と考えられてきた。その困難を避けながら量子アルゴリズムを実現する方法が提案され、Deutsch-Jozsa アルゴリズムなどが実証された¹⁾が、量子ビット数が増えると必要な光路の数が指数関数的に増大するという問題があった。

その状況で出されたのが、Knill らによって提案されたアイデアである²⁾。これは、半透鏡上で生じる、光子間の量子干渉と事後選択(post-selection)によって、確率的なゲート操作を実現、その確率を、更に量子テレポーションを利用して増幅するという物であった。その後、Raussendorf と Briegel により、一方向量子計算(one-way quantum computation)の考え方を応用することにより、より効率的な線形光学量子計算が可能であることが示されている³⁾。また、それと並行して、光子間に巨大な非線形性相互作用を発生させ、それを用いて直接的に高効率な量子ゲートを実現しようとする研究も進められている。

3-7-2 線形光学素子を用いた量子計算

(1) 光子間の量子干渉

今、モード(=経路)A, B からそれぞれ単一光子を入射し、同時に透過率、反射率ともに50%の半透鏡を通過後、モードC, Dのそれぞれに設置された二つの光子検出器で検出する(図3・11(a))。その際、経路Bには、光路長をわずかに変化させ位相を制御する位相板が設置されているとしよう。入力された光子の総数は2なので、この場合「C, Dで1個ずつ検出(確率 $P_{1,1}$)」「Cで2個検出(確率 $P_{2,0}$)」「Dで2個検出(確率 $P_{0,2}$)」の三つのケースが考えられる。それぞれの確率は、生成消滅演算子を用いて計算すると $P_{2,0} = P_{0,2} = 1/2, P_{1,1} = 0$ となる。つまり、光子の両方が反射される事象と、両方が透過する事象の確率振幅が互いに打ち消し合い、「出力モードの両方から一つずつ出射されることは決してない」これは、2光子量子干渉の典型的なケースであり、1987年にマンデル(Mandel)らによってパラメトリック蛍光対を用いた実験によって検証された⁴⁾。

図3・11(b)は、経路に挿入した光学遅延によって、ビームスプリッタに二つの光子が入射されるタイミングを変化させながら測定した、ビームスプリッタの二つの出力ポートに設置された光子検出器での同時計数確率である。時間差が0の付近で同時計数率はほぼ0に落ちている。このグラフは、ホン・オウ・マンデル(Hong-Ou-Mandel)干渉と呼ばれ、2光子量

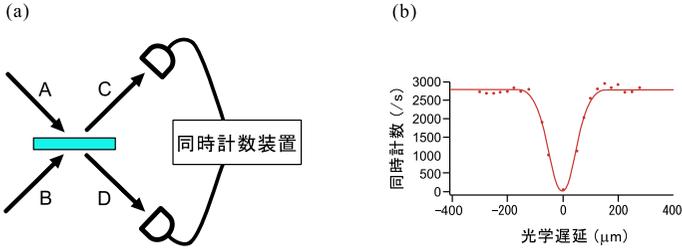


図 3・11 (a) 2 光子干渉の実験スキーム . (b) ホン - オウ - マンデル干渉の実験結果例

干渉の成否を判定するためによく用いられる .

(2) 線形光学素子を用いた制御ノットゲート

ホン - オウ - マンデル干渉の場合 , 光子の両方が反射される事象と , 両方が透過する事象の確率振幅は完全に打ち消し合った . この半透鏡の反射率を変化させることで , この二つの事象の打ち消し合いの度合いを調整することができる . 例えば反射率 $R = 1/3$ について考えると , 左側から入射した光子の立場で見た場合 , 右側から光子が同時に入射した場合と , 入射しなかった場合では位相が 180 度ずれるような状況を生み出すことができる . つまり , 出力モードの両方から一つずつ出射される場合に着目すれば , 反射率が $1/3$ のビームスプリッタが , 量子位相ゲートとして動作する^{5,6)} . その後 , 反射率が偏光に依存する特殊なビームスプリッタ (PPBS) を三つ用いることで , 一切干渉計を必要としない実現方法が発案 , 実証されている⁷⁾ . ほかに , もつれ合い (entangled) 光子対を補助的に用いた線形光学量子ゲートも発案されており^{8,9)} , 後述するクラスタ状態の生成方法として有用である .

3-7-3 線形光学素子量子計算の拡張性

前節で述べた線形光学素子を利用する方法は , 光子の中心波長や線幅などの影響を受けない , デバイスも既存技術で実現可能 , 常温で使用可能などの多くの利点をもつ . しかし大きな欠点として , その効率 η が低いことがある . 例えば , 先ほど紹介した制御ノットゲートの場合 , 入力された二つの光子が , それぞれ別々のポートから出力される確率が $1/9$ であるため , 効率 η は最大でも $1/9$ である . そのほかのゲートでも , 効率は $1/2$ を超えない . ゲートを N 個連結した回路においては , その成功確率はトータルで η の N 乗で与えられる . つまり , ゲートの個数に対して成功確率は指数関数的に減少してしまう .

この問題に対して , 現在二つの解決方法が提案されている . 一つは , 量子テレポテーションを利用した確率増幅 , もう一つは , クラスタ状態を用いた一方向量子計算を用いる方法である .

(1) 量子テレポテーションを用いた制御ノットの確率増幅

今 , ここに未知の量子状態の光子 A , 及び量子もつれ状態にある光子 B , C があるとすると . 量子テレポテーションは , 光子 A と光子 B の量子相関測定 (ベル測定) を行い , その結果に応じて光子 C にユニタリ変換 (偏光の回転など) を行うことで , もととの光子 A の状態を , 光子 C に「転送」する方法である .

この量子テレポテーションを用いた確率増幅は、次のように行われる²⁾。今、ここに確率 η の制御ノットゲートが合ったとしよう。その二つの入力のそれぞれを、いったん量子テレポテーションを行ってから、ゲート操作を行う場合を考えよう(図 3・12(a))。量子テレポテーションを行っても、状態は変化しないから、ゲート操作の結果は(量子テレポテーションを行わない場合と)変わらない。しかし、全体の成功確率も η のままである。

ここで重要なのは、量子テレポテーションで行われる 1 ビットのユニタリ変換と、制御ノットゲートの順番を逆にしても変わらない、という性質である。この性質を用いて、制御ノットゲートを手前に移動したのが図 3・12(b) である。

この回路は、一見最初の回路とそう変わらないように見えるが、大きな違いがある。この場合、二つのもつれ合った光子対のうち、二つの間で制御ノット操作をダイレクトに行っている。もつれ合った光子対は、いくらでも発生させることができるので、この制御ノット操作は何度でも試行することができる。確率 η のゲートを、 m 回試行しても一度も成功しない確率は、 $(1-\eta)^m$ で与えられる。例えば、 η が $1/9$ のときでも、50 回で 0.27%，100 回では 10^{-5} 以下となる。つまり、成功確率はそれぞれ 99.3% 及び 99.999% 以上に増幅できる。

ただし、ここでは量子テレポテーションを確率 1 で実行できることを仮定している。線形光学素子だけを用いても、量子テレポテーションの成功確率を 1 に漸近させることは可能だが、そのためにはたくさんの補助光学モードが必要になることが問題である。

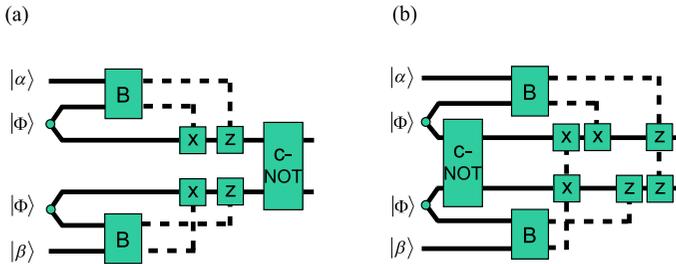


図 3・12 テレポテーションを用いた確率増幅

B はベル状態測定, X, Z は 1 ビットの量子ゲート, C-NOT は制御ノットゲートを表す。 $|\Phi\rangle$ はもつれ合った光子対

(2) クラスタ状態を用いた一方向量子計算

成功確率を実質的に増大させる、もう一つの方法が、クラスタ状態を用いた一方向量子計算を利用する方法である。量子テレポテーションを用いた確率増幅²⁾に比べて、圧倒的に少ない光学部品数を実現できるとして、注目されている。

クラスタ状態とは、多くの量子ビット (qubit) が量子もつれ合いにある状態である。Raussendorf と Briegel は、このクラスタ状態の量子ビットを一つずつ測定し、その結果に応じて次の量子ビットを測定することで、量子計算あるいは量子回路と同じ結果が得られる事を示した³⁾。ユニバーサルゲートに相当する操作も知られており、任意の量子回路を実現することができる。

この方法では、いったんクラスタ状態ができてしまえば、後は量子ビット (光子) を様々な基底で観測していだけでよい。つまり、クラスタ状態が得られれば、そこからの成功確率

は 1 である．よって必要なクラスタ状態を作成するための確率が，全体の成功確率を決める．

実は，クラスタ状態は，効率 η が有限のゲートを用いて，効率的に作成することができる．光子の場合，クラスタ状態を Type-I，Type-II と呼ばれる融合ゲート（fusion gate）で接続していく．これらの融合ゲートは，例えば垂直偏光を反射し，水平偏光を透過するような，普通の偏光ビームスプリッタによって容易に実現することができる．

例えば，Type-I の融合ゲートを用いると，確率 $1/2$ で二つのクラスタ状態を結合することが可能になる（図 3・13）．例えば，ベル状態の光子対が手元に二つあったとしよう．光子数は合計 4 個である．この二つの光子対から一つずつ光子を取り出して，Type-I の融合ゲートを施すと， $1/2$ の確率で，3 光子 GHZ 状態（三つの光子がもつれ合った状態）をつくり出すことができる．このとき必要なベル状態光子対の平均数は，3 個である．同様にして，平均して 6.5 個のベル状態光子対を消費することで，クラスタ状態に含まれる光子数を一つ増やすことができる．

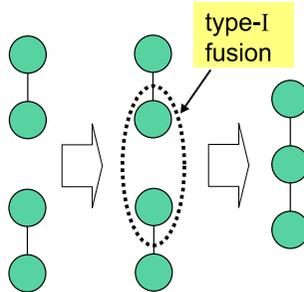


図 3・13 クラスタ状態の生成

丸は光子を，直線はそれらがベル状態にあることを示す

以上は，直線上のクラスタ状態を生成する場合の議論だったが，より複雑なクラスタ状態も Type-II 型の融合ゲートを利用して作成することができる．詳細な議論は省略するが，クラスタ状態を構成する量子ビットに比例する程度の資源（ベル状態光子数，及びゲート試行回数）で，任意の大きさのクラスタ状態を実現可能である．その後，Type-I 型の融合ゲートは，光子のロスを検出できないという問題があった．現在，Type-II 型の融合ゲートのみと，光子数の識別可能な検出器を用いる方式が検討され，最大 50 % のロス率を克服できると報告されている¹⁰⁾．

3-7-4 非線形光学効果を用いた量子ゲート

前章で説明したように， $1/2$ 以下と効率が低い線形光学素子を用いた量子ゲートによっても，スケラブルな量子計算は理論上可能である．しかし，実際に実現するに当たっては，融合ゲートを用いて必要な大きさのクラスタ状態をつくり上げる間に，それらの光子を低損失で保存しなければならない．そのような「光子メモリ」の研究も進められているものの，まだ実現までには多くの障害がある．それを解決するもう一つのアプローチが，光非線形性を利用して高い効率の実現を目指すものである．

二つの光子間の量子位相ゲートに関する最初の実験は，1995 年にカリフォルニア工科大学

のキンプルなどによって行われた¹¹⁾。その実験では、二つの小型ミラーによって作成された微小光共振器の中央部にセシウム原子を通過させ、その際の光学応答を測定した。単一のセシウム原子は1度につきしか光子を吸収できないため、光子1個レベルの光強度でも吸収飽和現象が生じ得る。つまり、セシウム原子を内包する微小共振器は、光子1個レベルではたらく光自己位相変調素子としてはたらく可能性がある。キンプルなどは、この位相変調(=光学遅延)の強度依存性の観測に、実際平均光子数が1程度の微弱コヒーレント光を用いて成功した。

ただその実験には、得られた位相差が14度しかなかったことなどいくつかの問題点があった。これらの問題についての検討が進められ、位相差を180度にするためには、片側キャビティを用いればよいことが見いだされている¹²⁾。また、入射した光子波動関数は、その光子波動関数の広がり方に依じて様々な変形を受けるが、その変形を最適化した場合、1光子当たりの効率として少なくとも78%を達成できることが示されている¹³⁾。またそのほかに、より微弱な非線形性デバイスと、線形光学量子計算を合成して用いる方法(「ハイブリッド光量子計算」)も提案されている¹⁴⁾。

参考文献

- 1) S. Takeuchi, "Experimental demonstration of a three-qubit quantum computation algorithm using a single photon and linear optics," *Phys. Rev. A*, vol.62, p.032301, 2000.
- 2) E. Knill, R. Laflamme, and G. Milburn, "A scheme for efficient quantum computation with linear optics," *Nature*, vol.409, pp.46-52, 2001.
- 3) R. Raussendorf and H.J. Briegel, "A One-Way Quantum Computer," *Phys. Rev. Lett.*, vol.86, pp.5188-5191, 2001.
- 4) C.K. Hong, Z.Y. Ou, and L. Mandel, "Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference," *Phys. Rev. Lett.*, vol.59, pp.2044-2046, 1987.
- 5) H.F. Hofmann and S. Takeuchi, "Quantum phase gate for photonic qubits using only beam splitters and postselection," *Phys. Rev. A*, vol.66, p.024308, 2002.
- 6) T.C. Ralph, A.G. White, W.J. Munro, and G.J. Milburn, "Simple scheme for efficient linear optics quantum gates," *Phys. Rev. A*, vol.65, p.012314, 2002.
- 7) R. Okamoto, H.F. Hofmann, S. Takeuchi, and K. Sasaki, "Demonstration of an optical quantum controlled-NOT gate without path interference," *Phys. Rev. Lett.*, vol.95, p.210506, 2005.
- 8) M. Koashi, T. Yamamoto, and N. Imoto, "Probabilistic manipulation of entangled photons," *Phys. Rev. A*, vol.63, p.030301, 2001.
- 9) T.B. Pittmann, B.C. Jacobs, and J.D. Franson, "Probabilistic quantum logic operations using polarizing beam splitters," *Phys. Rev. A*, vol.64, p.062311, 2001.
- 10) M. Varnava, D.E. Browne, and T. Rudolph, "How Good Must Single Photon Sources and Detectors Be for Efficient Linear Optical Quantum Computation?," *Phys. Rev. Lett.*, vol.100, p.060502, 2008.
- 11) Q.A. Turchette, C.J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H.J. Kimble, "Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic," *Phys. Rev. Lett.*, vol.75, p.4710, 1995.
- 12) H.F. Hofmann, K. Kojima, S. Takeuchi, and K. Sasaki, "Optimized phase switching using a single atom nonlinearity," *J. Opt. B, Quantum and semiclassical optics*, vol.5, pp.218-222, 2003.
- 13) K. Kojima, H.F. Hofmann, S. Takeuchi, and K. Sasaki, "Efficiencies for the single-mode operation of a quantum optical nonlinear shift gate," *Phys. Rev. A*, vol.70, p.013810, 2004.
- 14) P. van Loock, W.J. Munro, K. Nemoto, T.P. Spiller, T.D. Ladd, S.L. Braunstein, and G.J. Milburn, "Hybrid quantum computation in quantum optics," *Phys. Rev. A*, vol.78, p.022303, 2008.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-8 中性原子を用いた量子計算

(執筆者：高橋義朗)[2008 年 11 月受領]

中性原子を用いた量子計算には、様々な方向性があるが、大別すると、1) 基板上に微細な電極などを配置して電場、磁場、または光などにより微細なポテンシャルを形成して、それにより原子を操作するデバイスである、アトムチップを用いるものと、2) いわゆる光格子と呼ばれる周期的なポテンシャル中に原子を導入した系を用いるもの、の二つに大別される。アトムチップは原子物理・原子光学の技術と固体の電子・ナノデバイスの技術を融合させたもので、拡張性のある量子コンピュータを構築するのに大変有望な系であるが、紙数の関係でここでは割愛し、詳しくは、例えば、文献 1), 2) の解説を参照されたい。本稿では光格子中に原子を導入した系について主に述べることにする。

まず、中性原子のレーザ冷却と光格子について簡単に説明する。次に、光格子中の中性原子の系がどのような特徴があるかについて、量子コンピュータとして要求されるいくつかの重要な項目ごとに説明する。そして最後に、これまで報告された研究のいくつかについて紹介する。

3-8-1 中性原子のレーザ冷却と光格子

1980 年代以降本格的に研究が開始されたレーザ冷却・トラップ法により、高速に熱運動している原子集団から数秒程度の時間で、 10^6 個以上の原子を数 μK 程度に冷却することが可能になった。更に、原子間衝突を利用する、蒸発冷却と呼ばれる方法により、 $10^{14}/\text{cm}^3$ 程度の高密度の原子集団の温度を 100 nK 以下に冷却することが可能になり、ボース粒子に対してはボースアインシュタイン凝縮 (BEC) が生成され、フェルミ粒子に対しては、フェルミ縮退が生成されている。

このような超低温に冷却された原子は、光によってトラップすることができる。特に、光の定在波によるトラップは、光格子と呼ばれ、光の波長の半分の周期をもった周期ポテンシャルが形成されている。BEC をこの光格子に導入することにより、各格子点に原子が一つずつ導入された状態、いわゆるモット絶縁体状態を生成することができている⁴⁾。これを図 3-14 に模式的に示した。

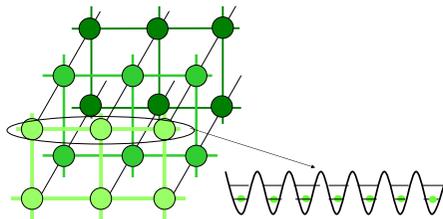


図 3-14 光格子

光格子にはいくつかのバリエーションがある。まず、周波数の異なる二つの光で定在波を形成した場合は、その周波数差に応じた速度で格子が移動する。これはトラップした原子を

移動させる技術、すなわち原子の「ベルトコンベヤ」として利用されている。特に、最近この技術を直交した二つの光格子に適用して、光格子中にランダムに導入された原子の並び替え、すなわち「ソーティング・マシーン」の機能を実証したことが報告され注目を集めた⁵⁾。今後、規則正しく並び替えられた原子を、高 Q 値の光共振器中に導入して量子計算を行うことが計画されている。

また、光を対向させるのではなく角度をつけて合波させると、その角度に応じた長い格子間隔の光格子を形成することができる。この場合、格子間隔は光の波長よりも十分長くできるため、各格子点上の原子を光学的に分離して観測することが可能になる。更に、波長が 2 倍だけ違う二つの光を用いて光格子を形成した場合、2 倍だけ違う格子間隔をもった、いわゆる超格子を形成することが可能である。

こうした光格子系を、量子計算への応用という観点から見た場合、固体中の電子系と比較して、1) 不純物や格子欠陥がない、理想的な格子系を提供することが可能である、2) 原子間相互作用や格子間の移動のしやすさを光の強度や偏光などにより自由にかつ精密にコントロールすることができる、3) 1 次元系、2 次元系など次元性を容易にコントロールすることが可能である、などの極めて優れた特徴を備えている。

3-8-2 量子コンピュータ実現の観点から見た光格子中の冷却原子の特徴

表 3-1 に量子コンピュータ実現に必要ないくつかの重要な項目³⁾に対する、光格子中の冷却原子の系の特徴をまとめた。以下では、それぞれの項目について補足も含めて述べる。

(1) 量子ビットと拡張性

磁気副準位や超微細構造準位などの原子の内部状態を量子ビットとみなすことができる。また前述のとおり、 10^5 個以上の原子を光格子の各格子点の一つずつ導入することが可能である。

(2) 量子ビットの初期化

原子の内部状態については、光ポンピングにより容易に特定の状態に揃えることができる。また、光格子への導入についても、ボース粒子についてはモット絶縁体状態を、偏極フェルミ粒子についてはバンド絶縁体状態を生成することにより、各格子点に単一原子を導入することが可能である。

表 3-1 光格子中の冷却原子の特徴

条件	有利な点	不利な点
量子ビットと拡張性	原子の豊富な内部状態，多数の光格子点	個々の原子へのアドレッシング
量子ビットの初期化	モット状態，光ポンピング	
デコヒーレンス	数 10 秒（期待）	光格子や制御光による光散乱，残留ガス衝突，浮遊磁場，など
ユニバーサルゲート操作	1 量子ビットゲート（RF 遷移，ラマン遷移，など）2 量子ビットゲート（原子間衝突，磁気及び電気双極子相互作用，など）	長いゲート時間
単一量子ビット測定	高感度蛍光観測	個々の原子の区別

(3) デコヒーレンス

一般に冷却原子の実験は超高真空中で行うため、環境の影響を受けにくく長いコヒーレンス時間が期待できる。ただし、光格子を形成するためのレーザ光に強度・位相揺らぎが存在すると原子に加熱を引き起こす。また光格子や制御光による光散乱、更には浮遊磁場などがデコヒーレンスを引き起こす。しかし、これらを克服することで、超高真空チャンバ中の残留ガスとの衝突で決まる数十秒程度まではデコヒーレンス時間を長くすることが可能であると期待される。

(4) ユニバーサルゲート操作

1 量子ビットのゲート操作については、RF 遷移や 2 光子ラマン遷移などを用いて操作をすることがこれまでに実証されている。また、2 量子ビットゲート操作については、これまで、制御された原子間衝突を利用したものが実証されており^{6,7)}、これについては次の項で詳しく紹介する。それ以外の 2 量子ビットゲート操作として、磁気双極子相互作用を用いたものが提案されている⁸⁾。ただし、相互作用の大きさは小さいため、典型的には 1 msec 程度の長いゲート時間を要することになる。これを克服するため、リドベルグ状態での大きい電気双極子相互作用を用いたものが提案されている⁹⁾。これにより、1 μm 程度の原子間距離においても 1 μs 以下のゲート時間が期待されている。これは長い格子間隔の光格子の場合に特に重要である。

(5) 単一量子ビット測定

単一の原子に対して、その閉じた 2 準位を用いて光を繰り返し吸収・放出させ、その蛍光を検出することにより、単一原子の測定が可能であり、実際実証されている。また、最近になって、セシウム原子を 5 μm 程度の長い格子間隔の 3 次元の光格子に、各格子点に 0 個または 1 個の割合で導入した後、各格子点の原子を 2 次元面内で分離して測定することに成功したことが報告されている¹⁰⁾。これは量子計算への応用上大変重要で興味深い結果であるが、ただし、光の波長の半分の格子間隔をもった光格子で、その特定の単一原子の状態を測定することにはこれまで成功した例はなく今後の重要な課題である。

3-8-3 中性原子を用いた量子計算に向けた研究例

(1) 制御された原子間衝突を用いたクラスタ状態の生成

光格子に導入された中性原子を用いて量子計算実現に向けて行われた実験のうち最も重要と思われるものとして基底状態の原子間の衝突を用いたものがあげられる⁶⁾。この実験では特に、多数の原子間の量子もつれ合い状態であるクラスタ状態¹¹⁾の生成に成功している。図 3・15 にどのようにしてクラスタ状態を生成したかを図示した。ただし、簡単のため、隣り合う 2 原子 A, B のみに注目して図示している。量子ビットはルビジウム原子の二つの超微細準位 $|0\rangle = |F=1, m_F=-1\rangle$ 及び $|1\rangle = |F=2, m_F=-2\rangle$ が対応している。まず、初期状態として一方の超微細準位 $|0\rangle$ にある原子のモット絶縁状態 $|0\rangle_A |0\rangle_B$ を生成する。次に、 $\pi/2$ パルスにより、二つの準位の重ね合せ $(|0\rangle_A + |1\rangle_A)(|0\rangle_B + |1\rangle_B)/2$ を生成する。ここで、光格子を形成するレーザ光のうち、打ち返しのレーザ光の偏光を変化させることにより、 $|0\rangle$ 状態にいる原子を、格子間隔の半分である $\lambda/4$ の距離だけ、右側に移動させ、 $|1\rangle$ 状態にいる原子をやはり $\lambda/4$ の距離だけ左側に移動させる。ここで、もともと隣どうしだった原子 A, B について、左にいた原子 A の $|0\rangle$ 状態と、右側にいた原子 B の $|1\rangle$ 状態が同じ格子点に存在する

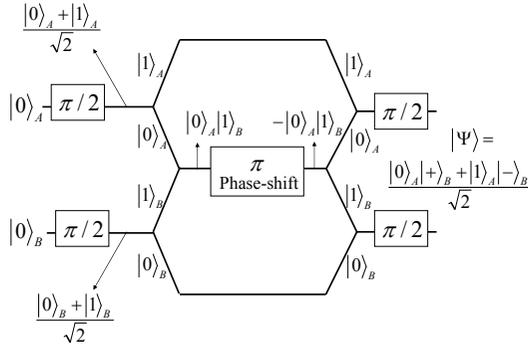


図 3・15 原子間衝突による量子もつれ合い状態の生成

ことになり、ここで原子間衝突が起こる。この原子間衝突は、超低温のもので s 波散乱のみが寄与し、この原子間相互作用の大きさに応じた位相シフトを生じる。これをちょうど π になるように時間を調節して、再び元の格子点に戻す操作をする。ここで再び $\pi/2$ パルスを照射すると、2 原子の間には最大の量子もつれ合い状態 $(|0\rangle_A|+\rangle_B + |1\rangle_A|-\rangle_B)/\sqrt{2}$ が生成されることになる。ここで、 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 、及び $|-\rangle = (-|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ である。以上の説明は 2 原子に関するものであるが、実際は多数の原子が関与した量子もつれ合い状態であるクラスタ状態が形成されている。これは一方向量子計算に必要とされる状態で、これを光格子中の冷却原子を用いて生成できたことは大変重要な成果であるといえる。

(2) 交換相互作用を用いたスワップゲート操作

光格子中の 2 個の原子の間に交換相互作用を利用して量子もつれ合い状態を生成する実験が最近報告された⁷⁾。この実験では、二つの光格子点ごとに孤立した系を準備することができるような光格子の配置になっている。更にその二つの格子点を一つにする操作が自由にできるようになっている。量子ビットはルビジウム原子の超微細準位 $F = 1$ の二つの磁気副準位 $|0\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$ 及び $|1\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ が対応している。二つの格子点のうち、左の原子 A の状態を $|0\rangle$ 、右の原子 B の状態を $|1\rangle$ に準備したのち、二つの格子点を一つにする操作を行う。ただし、一つの格子ポテンシャル中で、A 原子は振動励起状態に、B 原子は振動基底状態に、それぞれ移るようになっているのが、前述の実験との違いである。このとき、二つの原子は、同一の光格子ポテンシャル中で原子間衝突を起こすわけであるが、交換相互作用のためにその後の時間発展は、量子もつれ合い状態と直積状態を交互に移り変わる。これはスワップゲート操作に対応している。この様子を、シュテルン・ゲルラッハ効果とバンドマッピングの方法により、格子点中の原子の量子ビットの状態を区別して検出することにより、高精度で測定することに成功している。

(3) その他

中性原子ではなく、極性分子の大きな電気双極子モーメントを用いて量子コンピュータを実現しようという提案がある¹²⁾。この方向でのごく最近の成果として、ルビジウム原子とカリウム原子からなる分子の生成に成功したことが報告されている¹³⁾。まず、それぞれの原子を超低温まで冷却し、磁場を掃引することにより、原子間距離が非常に長い高振動励起状態の

分子を生成し、その後ラマン遷移により分子の振動回転基底状態に遷移させたというものである。これにより極性分子を用いた量子コンピュータの実現可能性が高まってきたといえる。

光格子以外の研究例としては、 $125\ \mu\text{m}$ 間隔で 2 次元的に配置した微小レンズアレイを用いて光を集光することにより、 $1\ \text{mK}$ 程度のポテンシャル深さをもった微小な光トラップのアレイを形成し、そこにルビジウム原子を導入し、各格子点に導入された原子集団の観測や個別アドレッシングや状態操作を行った実験が報告されている¹⁴⁾。更に、そのような微小な光トラップに単一原子をトラップして、そこから単一光子を発生させる実験が報告されている¹⁵⁾。このスキームでは量子計算のための量子ビット間のゲート操作としては、複数の単一原子トラップからの単一光子の測定により誘起することが計画されている。

参考文献

- 1) 中川賢一, 堀越宗一, “アトムチップ-基板上で冷却原子を操作する,” 光学, vol.37, no.7, pp.391-396, 2008.
- 2) 向井哲哉, “超伝導永久電流アトムチップ,” 光学, vol.37, no.7, pp.397-399, 2008.
- 3) D.P. DiVincenzo, “The physical implementation of quantum computation,” Fortschr. Phys., vol.48, pp.771-783, 2000.
- 4) M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms,” Nature, vol.415, pp.39-44, 2002.
- 5) Y. Miroshnychenko, W. Alt, I. Dotsenko, L. Förster, M. Khudaverdyan, D. Meschede, D. Schrader, and A. Rauschenbeutel, “An atom-sorting machine,” Nature, vol.442, p.151, 2006.
- 6) O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T.W. Hänsch, and I. Bloch, “Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms,” Nature, vol.425, pp.937-940, 2003.
- 7) M. Anderlini, P.J. Lee, B.L. Brown, J. S-Strabley, W.D. Phillips, and J.V. Porto, “Controlled exchange interaction between pairs of neutral atoms in an optical lattice,” Nature, vol.448, pp.452-456, 2007.
- 8) A. Derevianko and C.C. Canon, “Quantum Computing with magnetically interacting atoms,” Phys. Rev. A, vol.70, p.062319, 2004.
- 9) D. Jaksch, J.I. Cirac, and P. Zoller, “Fast quantum gates for neutral atoms,” Phys. Rev. Lett., vol.85, pp.2208-2211, 2000.
- 10) K. Nelson, X. Li, and D.S. Weiss, “Imaging single atoms in a three-dimensional array,” Nat. Phys., vol.3, pp.556-560, 2007.
- 11) R. Raussendorf and H.J. Briegel, “A one-way quantum computer,” Phys. Rev. Lett., vol.86, pp.5188-5191, 2001.
- 12) D. DeMille, “Quantum Computation with Trapped Polar Molecules,” Phys. Rev. Lett., vol.88, no.6, p.067901, 2002.
- 13) K.-K. Ni, S. Ospelkaus, M.H.G. de Miranda, A. Pe’er, B. Neyenhuis, J.J. Zirbel, S. Kotochigova, P.S. Julienne, D.S. Jin, and J. Ye, “A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules in the Rovibrational Ground State,” Science, vol.322, no.5899, pp.231-235, 2008.
- 14) R. Dumke, M. Volk, T. Müther, F.B.J. Buchkremer, G. Birkl, and W. Ertmer, “Micro-optical Realization of Arrays of Selectively Addressable Dipole Traps: A Scalable Configuration for Quantum Computation with Atomic Qubits,” Phys. Rev. Lett., vol.89, no.9, p.097903, 2002.
- 15) B. Darquie, M.P.A. Jones, J. Dingjan, J. Beugnon, S. Bergamini, Y. Sortais, G. Messin, A. Browaeys, and P. Grangier, “Controlled single-photon emission from a single trapped two-level atom,” Science, vol.309, pp.454-456, 2005.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-9 イオントラップを用いた量子計算

(執筆者: 早坂和弘) [2008 年 4 月 受領]

イオントラップ量子計算の最初のアイデアは Cirac と Zoller により 1995 年に発表された¹⁾。この方式では、線形ポールトラップ (Linear Paul Trap) 中でレーザー冷却により直線状に配列した原子イオン集団の個々の内部エネルギー固有状態を量子ビットとし、レーザーパルスとイオン集団重心振動のフォノン準位を用いて量子計算を行う。この提案にほぼ忠実な方法と拡張した方法により 8 量子ビットまでの量子計算が実現している²⁾。

3-9-1 イオントラップとレーザー冷却

イオントラップ量子計算では交流電場と直流電場の組み合わせにより複数個原子イオンを一直線状に配置する線形ポールトラップが用いられる。これを 10^{-8} Pa 以下の超高真空中に設置し、蓄積した原子イオンをレーザー冷却により静止させて孤立した量子系を実現する。

(1) 線形ポールトラップ

線形ポールトラップの最も基本的な電極構成と駆動方法を図 3-16(a) に示す。動径方向 (x, y) では交流電場 (角周波数 Ω , 振幅 V_0) による束縛を行い、軸方向 (z) には直流電場 U_0 での束縛を行う。単一イオンの運動はマシュー (Mathieu) 方程式により記述され、適切な動作条件で安定な蓄積が起こる³⁾。このときのイオン座標 $u_i (i = x, y, z)$ は、永年周波数 $\omega_i (\ll \Omega)$, V_0 に比例するパラメータ q_i , 初期位相 φ_i を用いて,

$$u_i(t) = u_{0i} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \left[1 + \frac{q_i}{2} \cos(\Omega t) \right] \quad (3 \cdot 31)$$

と近似される。 $q_z = 0$ であるので z 方向は調和振動, x, y 方向は ω_i での調和振動が Ω の微小振動で変調された運動となる。 x, y 方向の対称性より $\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$ である。レーザー冷却されたイオンが直線状の配置を取るために $\omega_r \gg \omega_z$ とする必要がある。動作条件の一例は $\Omega/2\pi = 23.5$ MHz, $(\omega_r, \omega_z)/2\pi = (5.0, 1.2)$ MHz である。

(2) ドップラー冷却

イオンを静止させるためにイオンの共鳴周波数よりわずかに低い周波数をもつレーザー光を照射して輻射圧によるドップラー冷却を行う。レーザー冷却遷移自然幅 Γ に対して到達温度は

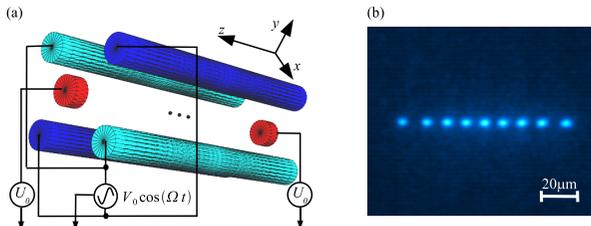


図 3-16 (a) 線形ポールトラップ . (b) 一直線状に配列した 9 個の $^{40}\text{Ca}^+$

$T_D = \hbar\Gamma/2k_B$ (k_B : ボルツマン定数) で与えられ, 例えば Ca^+ の場合 $\Gamma/2\pi = 20 \text{ MHz}$, $T_D = 0.5 \text{ mK}$ である. イオン集団が低温まで冷却されると, 規則的に配列する結晶化が起きる. $\omega_r \gg \omega_z$ であれば, 図 3・16(b) に示すような直線状配列を形成する. イオン間隔は単位長 $l_0 = (e^2/4\pi\epsilon m\omega_z^2)^{1/3}$ (m : イオン質量, e : 素電荷) に比例し, 数 μm のオーダーとなる.

(3) サイドバンド冷却

単一イオンの z 方向振動を量子化すると, 固有状態は周波数間隔 ω_z のフォノン (phonon) 準位として記述される. イオントラップ量子計算では, 2 ビット制御 NOT ゲートにフォノン準位 $n = 0, 1$ を用いるが, ドップラー冷却では到達不能であるので, 引き続きサイドバンド冷却により $n = 0$ までの冷却を行う. 2 準位 $|g\rangle, |e\rangle$ からなる単一イオン内部状態とフォノン準位による複合系は図 3・17 に示す梯子状の準位を形成している. 2 準位系は, その遷移周波数の線幅 Γ が, $\Gamma < \omega_z$ を満たすように選ぶ. 系が $|g\rangle|n\rangle$ にあるときに, $\omega_0 - \omega_z$ のレーザを照射して $|e\rangle|n-1\rangle$ に励起すると, イオンの広がりが遷移波長より十分小さければ (Lamb-Dicke 条件), 系は自然放出の際に高い確率で $|g\rangle|n-1\rangle$ に遷移しフォノン 1 個分のエネルギー $\hbar\omega_z$ を失う. これを繰り返すことにより, 最終的に $|g\rangle|0\rangle$ までの冷却を行う. N 個イオン集団重心の振動についても同様の議論が成り立つ.

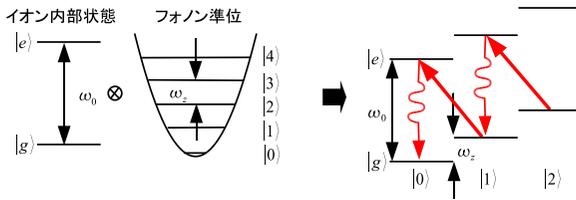


図 3・17 振動運動の量子化とサイドバンド冷却

3-9-2 量子ビット

(1) 用いられるイオン種

$\text{Be}^+, \text{Mg}^+, \text{Ca}^+, \text{Sr}^+, \text{Cd}^+, \text{Yb}^+$ などのアルカリ金属型電子配置を有する 1 価のプラス原子イオンが量子ビットとして用いられる. 最も多くの量子計算の実証に用いられたイオンは図 3・18(a) に示す $^{40}\text{Ca}^+$ (インスブルック大学ほか) と $^9\text{Be}^+$ (National Institute of Standards and Technology: NIST) である. $^{40}\text{Ca}^+$ では基底状態 $^2S_{1/2}$ のゼーマン副準位 $m_J = -1/2$ が $|0\rangle$, 準安定状態 $^2D_{5/2}$ のゼーマン副準位 $m_J = -1/2$ が $|1\rangle$ に割り当てられる. $^9\text{Be}^+$ では基底状態 $^2S_{1/2}$ の超微細構造準位のゼーマン副準位 $|F=2, m_F=-2\rangle, |F=1, m_F=-1\rangle$ がそれぞれ $|0\rangle, |1\rangle$ として用いられる. 論理量子ビットを用いて前者では 0.1 秒以上, 後者では 10 秒以上のコヒーレンス時間が観測されている.

(2) 初期化

サイドバンド冷却で 3 次的に $n = 0$ までの冷却を行った後, 図 3・18(b)(i) に示すようにレーザによる光ポンピングで量子ビットの初期化が行われる. 初期化するイオンの $|1\rangle$ と補助準位 $|a\rangle$ 間の遷移に共鳴するレーザを照射すると自然放出により $|0\rangle$ か $|1\rangle$ に遷移するが, 一度 $|0\rangle$ に遷移すればここにとどまり初期化が完了する. 数 10 ns で 100 % 近い効率で初期

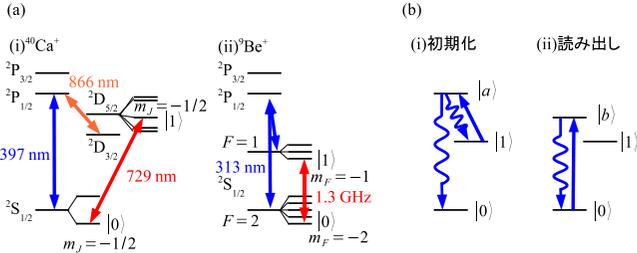


図 3-18 (a) 代表的イオンのエネルギー準位図 . (b) 初期化及び読み出しの方法

化が可能である． $^{40}\text{Ca}^+$ では波長 397 nm の σ^- 偏光レーザー光， $^9\text{Be}^+$ では波長 313 nm の σ^- 偏光レーザー光により初期化を行う．

(3) 読み出し

量子ビット読み出しは，レーザ誘起蛍光の有無により行う．図 3-18(b)(ii) にその原理を示す． $|0\rangle$ と補助準位 $|b\rangle$ 間の遷移に共鳴するレーザを読み出すイオンに照射すると，イオンが $|0\rangle$ にある際には繰り返し蛍光光子を発生するが， $|1\rangle$ にある際には蛍光を発生しない． $|0\rangle \rightarrow |b\rangle$ 遷移は通常 10^8 程度の遷移強度をもつので，現実的な検出効率を考慮すると毎秒 10^4 オーダの光子計数が検出され，10 ms 程度で効率 100 % に近い $|0\rangle$ ， $|1\rangle$ の識別が可能である． $^{40}\text{Ca}^+$ では波長 397 nm，866 nm のレーザ光を照射し，波長 397 nm の蛍光で量子ビットを読み出す． $^9\text{Be}^+$ では $^2\text{S}_{1/2}$ ， $|F=2, m_F=-2\rangle \rightarrow ^2\text{P}_{1/2}$ ， $|F=3, m_F=-3\rangle$ 遷移 (313 nm， σ^- 偏光) を用いる．

3-9-3 量子ゲート

(1) 1 ビット位相回転ゲート

1 ビットの位相回転ゲートは，イオン配列内の n 番目イオンのみに，量子ビットのエネルギー差 ω_0 に共鳴するレーザパルスを時間 t の間照射することにより行う．レーザ位相を φ ，レーザによる上下準位間での振動周波数 (ラビ周波数) を Ω とすると，このゲートは，式，

$$\widehat{V}_n(\Omega t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & -ie^{i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ -ie^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{pmatrix} \quad (3\cdot32)$$

で与えられる．

(2) 2 ビット制御 NOT ゲート

Cirac と Zoller により提案された 2 ビット制御 NOT ゲート (以下，C-Z 型制御 NOT ゲート) は，イオン集団重心のフォノン準位を利用し，周波数と照射時間を制御したレーザパルスをおよびのイオンに照射することにより行われる．3 ステップのレーザ照射によって制御位相ゲートを行い，その後 $\pi/2$ の 1 ビット位相回転ゲートを挿入することにより制御 NOT ゲートを得る．

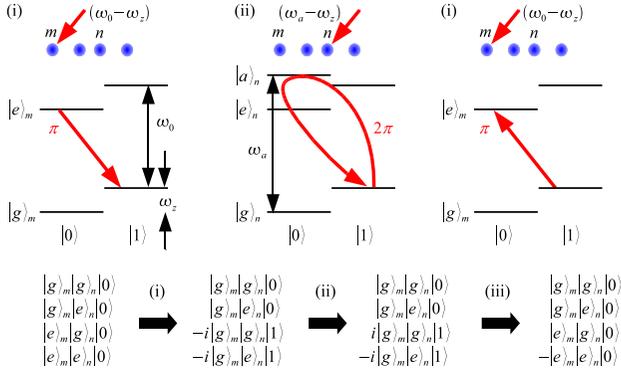


図 3-19 2 ビット制御位相ゲート $\widehat{U}_{m,n}$

図 3-19 に制御位相ゲート $\widehat{U}_{m,n}$ の手順を示す．ここでは n 番目イオンの $|0\rangle, |1\rangle$ をそれぞれ $|g\rangle_n, |e\rangle_n$ ，イオン集団重心のフォノン準位を $|0\rangle, |1\rangle$ と表記する．内部状態遷移周波数は ω_0 ，フォノン準位遷移周波数は ω_z である．サイドバンド冷却により $|0\rangle$ まで冷却されているとする．ステップ (i) で， m 番目イオンに，周波数 $\omega_0 - \omega_z$ で π の位相回転を行うレーザーパルス (π パルス) を照射して，内部状態をフォノン準位へと写像する．フォノン準位はすべてのイオンが共有しているので，すべてのイオンが m 番目イオンと相互作用する準備ができたことになる．ステップ (ii) では n 番目イオンの補助状態 $|a\rangle$ を用い，周波数 $\omega_a - \omega_z$ の 2π パルスが $|g\rangle_n|1\rangle$ にのみ -1 の位相変化を与える．ステップ (iii) で，再び $\omega_0 - \omega_z$ の π パルスを m 番目イオンに照射してフォノン準位を m 番目イオンに写像する．これらのステップにより，2 ビット制御位相ゲート $\widehat{U}_{m,n}$ が得られる．この前後に n 番目イオンの位相回転ゲートを挿入することにより $\widehat{V}_n(\pi/2, \pi/2)\widehat{U}_{m,n}\widehat{V}_n(\pi/2, -\pi/2)$ として制御 NOT ゲートが得られる．

この C-Z 型制御 NOT ゲートは，混成パルス使用などの若干の変更を伴った形で，インスブルック大学により $^{40}\text{Ca}^+$ を用いて実現された⁴⁾．ゲート時間は $660 \mu\text{s}$ ，ゲートの忠実度は $F = 0.71$ であった．これとは異なる幾何位相を用いた制御 NOT ゲートが NIST により同時期に実現された⁵⁾．この方式ではフォノン準位の基底状態までの冷却，個別のレーザー照射が不要などの特色があり，ゲート時間は $39 \mu\text{s}$ ，忠実度は $F = 0.97$ であった．

3-9-4 量子計算

2 ビット制御 NOT ゲートが実現されたことにより，任意の量子ゲートの構成が可能になり，8 個までのイオンを用いた様々な量子計算が実現されている．そのうちの主な報告例を表 3-2 に示す．個数増加による重心振動以外のフォノン準位との混信などの諸問題により，単一の線形ポルトラップで同時に量子計算ができる量子ビット数は既に限界に達していると考えられている．このため，微小線形ポルトラップの集積回路を構築して，少数個イオン集団による量子ゲート動作と量子メモリ動作を統合することにより大規模量子計算を行う試みが広く行われている⁶⁾．これまでにセグメント化した直線トラップ，T 型接合トラップ，

表 3・2 これまでに実証された主な量子計算

量子計算	研究グループ	量子ビット	文献
3 イオン量子もつれ生成	NIST インスブルック大学	${}^9\text{Be}^+$	Science, vol.304, p.1476, 2004
		${}^{40}\text{Ca}^+$	Science, vol.304, p.1478, 2004
量子テレポテーション	インスブルック大学 NIST	${}^{40}\text{Ca}^+$	Nature, vol.429, p.734, 2004
		${}^9\text{Be}^+$	Nature, vol.429, p.737, 2004
量子エラー訂正	NIST	${}^9\text{Be}^+$	Nature, vol.432, p.602, 2004
半古典量子フーリエ変換	NIST	${}^9\text{Be}^+$	Science, vol.308, p.997, 2005
量子演算分光	NIST	${}^{27}\text{Al}^+$, ${}^9\text{Be}^+$	Science, vol.309, p.749, 2005
Grover 検索アルゴリズム	ミシガン大学	${}^{111}\text{Cd}^+$	Phys. Rev. A, vol.72, p.050306R, 2005
6 イオン量子もつれ生成	NIST	${}^9\text{Be}^+$	Nature, vol.438, p.639, 2005
8 イオン量子もつれ生成	インスブルック大学	${}^{40}\text{Ca}^+$	Nature, vol.438, p.643, 2005
量子もつれによる精密分光	インスブルック大学	${}^{40}\text{Ca}^+$	Nature, vol.443, p.316, 2006
量子もつれ精製	NIST	${}^9\text{Be}^+$	Nature, vol.443, p.838, 2006
遠隔イオン量子もつれ生成	ミシガン大学	${}^{171}\text{Yb}^+$	Nature, vol.449, p.68, 2007

平面状トラップなどの動作が確認されている。

参考文献

- 1) J.I. Cirac and P. Zoller, "Quantum Computation with Cold Trapped Ions," Phys. Rev. Lett., vol.74, no.20, pp.4091-4094, 1995.
- 2) D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R.B. Blakestad, J. Chiaverini, D.B. Hume, W.M. Itano, J.D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, and D.J. Wineland, "Creation of a six-atom 'Schrödinger cat' state," Nature, vol.438, no.7068, pp.639-642, 2005; H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, and R. Blatt, "Scalable multi-particle entanglement of trapped ions," Nature, vol.438, no.7068, pp.643-646, 2005.
- 3) D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, "Quantum dynamics of single trapped ions," Rev. Mod. Phys., vol.75, no.1, pp.281-324, 2003.
- 4) F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G.P.T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C.F. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, "Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate," Nature, vol.422, no.6930, pp.408-411, 2003.
- 5) D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, D. Lucas, M. Barrett, J. Britton, W.M. Itano, B. Jelenkovic, C. Langer, T. Rosenband, and D.J. Wineland, "Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate," Nature, vol.422, no.6930, pp.412-415, 2003.
- 6) S. Seidelin, J. Chiaverini, R. Reichle, J.J. Bollinger, D. Leibfried, J. Britton, J. Wesenberg, R.B. Blakestad, R.J. Epstein, D. Hume, W.M. Itano, J.D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, N. Shiga, and D. J. Wineland, "A microfabricated surface-electrode ion trap for scalable quantum information processing," Phys. Rev. Lett., vol.96, no.25, pp.253003, 2006; J. Labaziewicz, Y. Ge, P. Antohi, D. Leibbrandt, K.R. Brown, and I.L. Chuang, "Suppression of Heating Rates in Cryogenic Surface-Electrode Ion Traps," Phys. Rev. Lett., vol.100, no.1, pp.013001, 2008.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-10 NMR 量子計算

(執筆者: 北川勝浩)[2009年12月受領]

分子の核スピンを量子ビットとし, 核磁気共鳴 (Nuclear Magnetic Resonance: NMR)¹⁾の原理で高周波磁場パルスによって量子ビットを制御し, 量子計算を行う NMR 量子計算^{2,3)}について説明する. 量子ビットとして用いられるのは主にスピン 1/2 の核スピんで, 有機分子の場合はプロトン ^1H , フッ素 ^{19}F , 炭素 ^{13}C , 窒素 ^{15}N , 燐 ^{31}P などである. 最初に NMR 分光と NMR 量子計算に共通する予備知識を述べ, その後に NMR 量子計算について説明し, 最後に分子の電子スピンも含めて課題と展望を述べる. より詳細な情報については, レビュー^{4,5)}を参照していただきたい.

3-10-1 核磁気共鳴 (NMR)

(1) ゼーマン相互作用

スピン角運動量ベクトル $\hbar\mathbf{I}$ の核スピンは磁気モーメント $\mu = \hbar\gamma_n\mathbf{I}$ をもち, z 向きの静磁場 $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$ 中に置かれると, ゼーマン相互作用 $\mathcal{H}_0 = -\mu \cdot \mathbf{B} = -\hbar\gamma_n B_0 I_z$ によって, スピンベクトル \mathbf{I} の z 成分 I_z の固有状態に分裂する. スピン 1/2 の場合は, 固有値 $\pm 1/2$ の固有状態 $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ に分裂し, 2 準位系を成す. スピン 1/2 の状態は, これら二つの基底状態の重ね合わせとして $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \exp(i\varphi)\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$ と書ける. スピンベクトルの期待値 $\langle\mathbf{I}\rangle$ は極座標系で (θ, φ) を向く. スピン 1/2 は量子ビットと完全に等価であり, そのヒルベルト空間からはみ出すことはない. その点で, 多準位系の一部を二準位系とみなしたものと堅牢である. 以下, 慣習的に $|\uparrow\rangle = |0\rangle, |\downarrow\rangle = |1\rangle$ と対応させる. $|\psi\rangle$ が I_z の固有状態で無い場合, スピンは静磁場のまわりにラーモア角周波数 $\omega_n = \gamma_n B_0$ で歳差運動する. γ_n は磁気回転比で, 核種によって固有の値を持つ.

(2) 観測

歳差運動するスピンのまわりに静磁場と直交する磁場を拾うコイルがあると, 電磁誘導によって角周波数 ω_n の信号が誘起される. 実際には, 核スピン 1 個の歳差運動による信号は熱雑音に埋もれて検出できず, 10^{18} 個程度以上の膨大な数の分子の集団の自由誘導減衰 (Free Induction Decay: FID) 信号を観測する. これは, 膨大な数の核スピンの集団のスピンベクトルの横成分の総和しか見ない非常に弱い測定であり, 磁気共鳴では個々のスピンに対して $|0\rangle$ か $|1\rangle$ かの射影測定はできない.

FID 信号をフーリエ変換して ω_n を分析することによって, γ_n が分かり, 核種を特定できる.

(3) 化学シフト

実際に分子内の核スピンの感じる静磁場は, 外部から印加された B_0 が核スピンのまわりの電子によって磁気遮蔽されたものであり, 分子内の局所的な電子環境によってわずかに異なる. そのため, 歳差運動の周波数もわずかに異なり, 化学シフトと呼ばれる. このおかげで, 核種だけでなく, 分子内のサイトに関する情報も得られる. 核種と化学シフトによるラーモア角周波数 ω_n の違いは, 量子ビットを周波数によって番地付けして, 区別して操作することを可能にする.

(4) 共鳴磁場パルスの作用

コイルに核スピンのラーモア周波数近傍の高周波電流を流して核スピんに静磁場と直交す

る方向の高周波磁場を印加すると、トルクとして働く。印加した高周波磁場と同じ角周波数で核スピンと同じ向きに z 軸のまわりを回転する回転座標系に乗ってみると、高周波磁場は横向きに静磁場に見え、核スピンはその静磁場のまわりを歳差運動する。その角速度は高周波磁場の振幅に比例し、回転角は高周波磁場振幅と持続時間の積に比例する。この積をスピンの回転角の単位で表したものをパルス面積と呼ぶ。パルス面積が π の高周波磁場パルスを π パルス、その半分の面積のパルスを $\pi/2$ パルスと呼び、頻繁に使われる。回転軸は、共鳴の場合には xy 平面内にあり x 軸と成す角は高周波の位相によって決まる。複数のパルスを組み合わせれば、任意の軸のまわりの任意の回転、すなわち 1 量子ビットの任意の量子演算が実現できる。 π パルスは NOT に対応する量子演算を行う。

(5) スピン間相互作用

核スピン間の相互作用は、固体では双極子相互作用が支配的である。溶液では、分子の運動のために双極子相互作用は平均化されて消えるが、化学結合にあずかる電子を介した J 結合と呼ばれる相互作用が核スピン間に残っている。歳差周波数が異なる核スピン $\mathbf{I}_j, \mathbf{I}_k$ 間の相互作用は、時間的に平均化されても消えない永年項だけを考えれば、いずれの場合も、 $\mathcal{H}_{jk} = \hbar\omega_{jk}I_{jz}I_{kz}$ と書いて、他方のスピンの $\pm 1/2$ どちらの固有状態にあるかによって、角周波数が ω_{jk} だけ異なる。双極子相互作用の場合は、核間ベクトルを \mathbf{r}_{jk} 、それと静磁場 \mathbf{B}_0 がなす角を θ_{jk} とすると、 ω_{jk} は核間距離 $|\mathbf{r}_{jk}|$ の -3 乗と $1 - 3\cos^2\theta_{jk}$ に比例し、 ω_{ij} から核間距離の情報が得られる。溶液の場合は、 ω_{ij} から化学結合の情報が得られる。いずれも分子の構造決定に重要な役割を果たす。

核スピン間の相互作用は、CNOT など 2 量子ビット間の量子演算を可能にする。一方、量子ビットとして使用する核スピンとそれ以外のスピン間の相互作用は、デコヒーレンスをもたらす。

(6) デカップリング

これら、ゼーマン、化学シフト、スピン間の相互作用のエネルギーから、分子構造などを決定するのが NMR 分光である。これらの相互作用は同時に起こるので、複数の相互作用の情報が混在する。そこで、相互作用を選択的に消去するデカップリングや、消去されている相互作用を選択的に復活させるリカップリングのパルス系列を駆使して欲しい情報を抽出する。これは、量子演算でも基本的な役割を果たすので、簡単な例でその原理を説明する。3 つの量子ビット A, B, C を担う核スピン $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B, \mathbf{I}_C$ がすべて結合して、核スピンのハミルトニアンが $\mathcal{H} = -\hbar\omega_A I_{Az} - \hbar\omega_B I_{Bz} - \hbar\omega_C I_{Cz} + \hbar\omega_{AB} I_{Az} I_{Bz} + \hbar\omega_{BC} I_{Bz} I_{Cz} + \hbar\omega_{CA} I_{Cz} I_{Az}$ で与えられる分子を考える。A だけに作用する π パルスを照射すると、 I_{Az} が $-I_{Az}$ に変わり、ハミルトニアンの A に関する部分の符号が反転する。これは π パルスによって A に関する時間発展が反転することを意味する。上のハミルトニアン通りの各項の時間発展の向きを +、その逆向きの時間発展を - で表す。各量子ビットに適切なタイミングで π をパルスを照射し、ハミルトニアンの各項の時間発展の向きを、表 3・3 の Walsh 関数系に従って変化させれば、0 次の Walsh 関数になる時間発展だけが蓄積し、他の時間発展は打ち消される⁶⁾。

例えば、AB 間の相互作用だけを残して、他の時間発展をすべて打ち消すには、A と B に 2 次、C に 3 次の Walsh 関数を割り当てて、その符号を実現するために必要な π パルスを照射する。そうすると $\hbar\omega_{AB} I_{Az} I_{Bz}$ による時間発展の符号は 0 次の Walsh 関数となり蓄積されるが、それ以外の項による時間発展はいずれも 1 周期で消える。

表 3・3 π パルスによるデカップリング

Walsh 関数 次数	時間枠の符号				発展 累積	
	0	1	2	3		
0 次	+	+	+	+	+	
1 次	+	π	$-\pi$	π	$-\pi$	0
2 次	+	+	π	$-\pi$	0	0
3 次	+	π	$-\pi$	$-\pi$	π	0
i 次 \times i 次	0 次				+	
0 次 \times i 次	i 次					
1 次 \times 2 次	3 次				0	
2 次 \times 3 次	1 次				0	
3 次 \times 1 次	2 次				0	

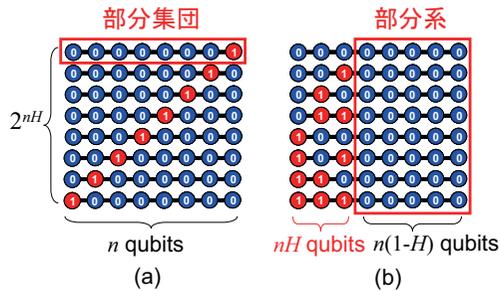


図 3・20 NMR 量子計算の初期化。(a) 部分集団 (疑似純粋状態) の信号を抽出, (b) データ圧縮によって部分系を初期化

このように, スピンの時間発展を π パルスで選択的に巻き戻すことができるので, 任意の 1 量子ビット演算と CNOT を実現することができ, それらの組み合わせによって万能な量子回路を構成できる。

(7) 初期状態

核スピンの集団の初期状態は, 熱平衡状態であり, ボルツマン定数を k_B , 温度を T として, 密度行列は $\rho_{eq} = \exp(-iH/k_B T) \approx \exp(-iH_z/k_B T)$ と近似できる。ラーモア角周波数 ω_n の核スピンの初期状態は, $\rho_n = \frac{1}{2}(1+\delta)|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}(1-\delta)|1\rangle\langle 1|$ と書いて, 偏極率 $\delta = \tanh(\hbar\omega_n/2k_B T)$ の分だけ $|0\rangle$ の方が $|1\rangle$ よりも占有数が多い混合状態である。典型的な数値例をあげれば, $B_0 = 11.7$ T でプロトンのラーモア周波数は $\omega_n/2\pi = 500$ MHz で, 常温 $T = 300$ K では, 偏極率は $\delta = 4 \times 10^{-5}$ しかない。

3-10-2 NMR 量子計算

(1) 疑似純粋状態

NMR 量子計算は, 極めて乱雑な混合状態である常温の熱平衡状態を初期状態とするにも関わらず, $\rho = (1-p)2^{-n}\mathbf{I} + p|\psi\rangle\langle\psi|$ で表される n 量子ビットの疑似純粋状態 (pseudopure state)

を考慮することによって、純粋状態 $|\psi\rangle$ を初期状態とした場合と定性的には全く同じ信号を観測できる。これは、単位行列 \mathbf{I} に比例する部分が NMR では時間発展せず信号も出さないためである。疑似純粋状態の作り方には、網羅の平均化、論理的ラベル法、空間的平均化などがある⁷⁾。しかし、いかなる方法を用いても、 n 量子ビットの典型的な状態の数がほぼ 2^{nH} 個あるのに対して、図 3・20(a) のように特定の状態にある分子の部分集団からの信号だけを抽出すれば、その信号強度は 2^{-nH} で n とともに指数的に減少するのは避けられず、それを補って信号を観測するには、 2^{nH} 回積算するか、分子の数を 2^{nH} 倍にするしかない。ここで H は、1 量子ビットあたりの初期エントロピーである。いずれにしても、量子ビット数 n に対して指数的な計算資源を必要とするので、量子計算の古典計算に対する優位性を完全に失ってしまう。これはスケーラビリティの問題ではなく、この方法ではそもそも真の量子計算は達成されないとみなすべきである。ただし、初期化するべき量子ビット数が問題の大きさによらず固定の場合はこの方法で問題が無い場合もある⁸⁾。

3-10-3 課題と展望

NMR 量子計算を真の量子計算へと発展させるために解決すべき課題について述べる。

(1) 真の初期化

図 3・20(b) のように、 2^{nH} 個の典型的状態にある分子集団がすべて同じ状態にある部分系を作ることができれば、その部分系からの信号は指数的に減少しない。データ圧縮によって 2^{nH} 個の初期状態の違いを nH 量子ビットに圧縮し、残りの $n(1-H)$ 量子ビットをすべて同じ状態に初期化して、その部分を量子計算に使うことができる⁹⁾。それには、まず物理的に偏極率を高める必要があり、パラ水素¹⁰⁾や三重項電子スピンを用いた動的核偏極 (DNP)¹¹⁾ の試みがされている。また、エントロピーを熱浴に汲み出す熱浴アルゴリズム冷却の研究も行われている¹²⁾。

(2) 量子演算精度

誤り耐性量子計算には NMR 分光とは桁違いの精度が要求される。NMR 分光では高周波磁場の不均一性が数%程度あるが、初期化で偏極率を 5 桁高めれば、試料体積を 5 桁小さくして、均一性を確保できる。

パルス波形を数値的に最適化して量子演算精度を上げる研究が盛んに行われている^{16, 17)}。

デコヒーレンスに打ち勝つには高周波磁場を強くする必要があり、そのため高 Q の共振回路を使うと過渡現象によってパルス波形が変形して、演算精度が悪くなるというジレンマがある。そこで、共振器過渡現象を積極的に補償して核スピンの照射する高周波磁場の精度を上げる研究が行われている¹⁸⁾。

(3) スケーラビリティ

溶液分子で 7 量子ビット¹³⁾や 12 量子ビット¹⁴⁾の実験が行われているが、分子の非対称性によって量子ビットを増やすには限界がある。その点で、1993 年に Lloyd が提案した $(ABC)_n$ 型の 1 次元高分子アーキテクチャは¹⁵⁾、対称性が高く、量子ビットがいくら増えても 16 の周波数の磁場パルスによって万能な量子回路が構成できるという利点を有する。離れた量子ビット間の演算は SWAP と制御 SWAP でパケツリレー式にデータを転送するため手間がかかるが、オーバーヘッドは量子ビット数に比例するだけなので、量子計算の指数的高速性を損なわない。電子スピン量子ビットについて、このようなアーキテクチャを持つ物質の研究

が行われている¹⁹⁾。

(4) デコヒーレンス

分子内部の余分な自由度との結合によるデコヒーレンスは、例えば ^{14}N を ^{15}N に置換するなど自由度を減らすか制御可能な自由度と置きかえることによって解決可能と考えられる。一方、分子外部との結合によるデコヒーレンスは、磁氣的希釈によって結合を弱めることによって解決されると考えられる¹⁹⁾。

(5) 測定

核スピンや電子スピンの量子ビットとしての最大の弱点は射影測定が実現していないことと考えられる。これが量子計算の実現に致命的かどうかはまだ分からないが、射影測定が可能になれば、量子計算以外にも大きなインパクトを与えることは間違いない。

参考文献

- 1) 日本化学会編, 第5版 実験化学講座 8 NMR・ESR, 丸善, 2006.
- 2) N.A. Gershenfeld and I.L. Chuang, "Bulk Spin-Resonance Quantum Computation," *Science*, vol.275, pp.350-356, 1997.
- 3) D.G. Cory, A.F. Hahmy, and T.F. Havel, "Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy," *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol.94, pp.1634-1639, 1997.
- 4) L.M.K. Vandersypen and I.L. Chuang, *Rev. Mod. Phys.*, vol.76, 1037, 2004.
- 5) D. Suter and T.S. Mahesh, "Spins as qubits: Quantum information processing by nuclear magnetic resonance," *J. Chem. Phys.*, vol.128, p.052206, 2008.
- 6) 北川勝浩, "NMR 量子コンピュータ," *数理科学*, no.424, pp.43-50, 1998.
- 7) M. Knill, I.L. Chuang, and R. Laflamme, "Effective pure states for bulk quantum computation," *Phys. Rev. A*, vol.57, pp.3348-3363, 1998.
- 8) A. Fahmy, R. Marx, W. Bermel, and S.J. Glaser, "Thermal equilibrium as an initial state for quantum computation by NMR," *Phys. Rev. A*, vol.78, p.022317, 2008.
- 9) L.J. Schulman and U.V. Vazirani, *Proc. 29th Annual ACM Symp. on Theo. Comp.*, pp.322-329, 1999.
- 10) M.S. Anwar, D. Blazina, H.A. Carteret, S.B. Duckett, T.K. Halstead, J.A. Jones, C.M. Kozak, and R.J.K. Taylor, "Preparing High Purity Initial States for Nuclear Magnetic Resonance Quantum Computing," *Phys. Rev. Lett.*, vol.93, p.040501, 2004.
- 11) A. Kagawa, M. Negoro, K. Takeda, and M. Kitagawa, "Magnetic-field cycling instrumentation for dynamic nuclear polarization-nuclear magnetic resonance using photoexcited triplets," *Rev. Sci. Instrum.*, vol.80, p.044705, 2009.
- 12) J. Baugh, O. Moussa, C.A. Ryan, A. Nayak, and R. Laflamme, "Experimental implementation of heat-bath algorithmic cooling using solid-state nuclear magnetic resonance," *Nature*, vol.438, pp.470-473, 2005.
- 13) L.M.K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, G.S. Yannoni, M.H. Sherwood, and I.L. Chuang, "Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance," *Nature*, vol.414, pp.883-887, 2001.
- 14) C. Negrevergne, T.S. Mahesh, C.A. Ryan, M. Ditty, F. Cyr-Racine, W. Power, N. Boulant, T. Havel, D.G. Cory, and R. Laflamme, "Benchmarking Quantum Control Methods on a 12-Qubit System," *Phys. Rev. Lett.*, vol.96, p.170501, 2006.
- 15) S. Lloyd, "Potentially realizable quantum computer," *Science*, vol.261, pp.1569-1571, 1993.
- 16) E.M. Fortunato, M.A. Pravia, N. Boulant, G. Teklemariam, T.F. Havel, and D.G. Cory, "Design of strongly modulating pulses to implement precise effective Hamiltonians for quantum information processing," *J. Chem. Phys.*, vol.116, p.7599, 2002.

- 17) N. Khaneja, T. Reiss, C. Kehlet, T. Schulte-Herbrüggen, and S.J. Glaser, "Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms," *J. Magn. Reson.*, vol.172, p.296, 2005.
- 18) K. Takeda, Y. Tabuchi, M. Negoro, and M. Kitagawa, "Active compensation of rf-pulse transients," *J. Magn. Reson.*, vol.197, pp.242-244, 2009.
- 19) K. Satoh, et. al., "Molecular electron-spin quantum computers and quantum information processing: pulse-based electron magnetic resonance spin technology applied to matter spin-qubit," *J. Mate. Chem.*, vol.19, pp.3739-3754, 2009.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-11 半導体中の核・電子スピンをを用いた量子計算

(執筆者：伊藤公平)[2008年11月受領]

半導体素子は p 型または n 型不純物を意図的に添加することにより作製される．シリコン単結晶にリンを添加することを例にあげよう．1 個のリン原子がシリコン原子を格子位置で置き換えれば，5 価のリンは 4 価のシリコンより一つ多い電子を有するために，常温ではその電子一つが伝導帯中に供給されて自由に移動できるキャリアとなる．しかし，この状態を 10 ケルビン以下に冷やすと図 3・21 のように状況は一変する．1 個の余分な電子がリン陽子とのクーロン引力によりリン不純物に束縛され，母体シリコンを背景にしながらボーア半径約 3 nm を有する水素不純物的な状態が形成される．すべてのリン原子は安定同位体 ^{31}P により構成され，この同位体は原子核スピン $I = 1/2$ を有する．そのためリン不純物を 1 個添加することは，リンの原子核スピン一つを添加することを意味する．図 3・21 のリン不純物部分の矢印が核スピンを示し，この上向きと下向きが $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の 2 準位系を形成することからリン核スピンを量子ビットに利用することができる．また，リンに束縛された電子もスピンを有し（図 3・21 の e^- 部分の矢印），これも上向きと下向きが 2 準位系を形成することから量子ビットとなる．更にシリコンは ^{28}Si ， ^{29}Si ， ^{30}Si という 3 種類の安定同位体により構成されている．ここで ^{28}Si と ^{30}Si は核スピンをもたないが， ^{29}Si は核スピン $I = 1/2$ を有するため， ^{29}Si が位置するところには図 3・21 中に矢印で示す 2 準位系が形成され，これも量子ビットとして利用できる．このように半導体中に不純物や欠陥を添加することにより電子スピンや核スピンを導入し，それらを量子ビットとして量子計算につなげる研究が盛んになっている．

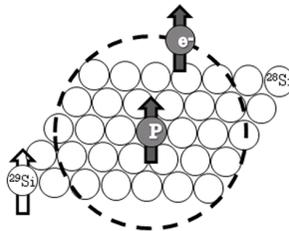


図 3・21 シリコン中にリンを添加した場合に形成される様々な量子ビット．詳細は本文参照のこと

表 3・4 に半導体中に不純物や特定の同位体を添加した場合の量子ビットの候補例を示す．シリコンとダイヤモンドが中心となる理由は，これら IV 族半導体だけが核スピンをもたない安定同位体 (^{28}Si ， ^{30}Si ， ^{12}C など) を有するためである．核スピをもつ安定同位体は添加される量子ビットのコヒーレンス時間（量子情報保持時間）を短縮させるという弊害をもたらす．例えば化合物半導体を代表する GaAs を構成するすべての安定同位体が核スピをもっている．よって半導体に不純物を添加することに基づく量子計算において化合物半導体を用いることは得策ではない．ただし，化合物半導体の多くは直接遷移型半導体であるため量子通信との融合という点で IV 族よりはるかに有利であり，次章で紹介される量子ドット研究でも化合物半導体がリードしていることは重要な認識である．

表 3・4 半導体中の量子ビットの候補例

半導体	量子ビット不純物
シリコン (Si)	P, ²⁹ Si, Li, S, Te, Th など
ダイヤモンド (C)	窒素-空孔欠陥 (N-V), ¹³ など

(1) シリコン半導体中の不純物を用いた量子計算研究の現状

シリコンを基板とした量子計算の研究はシリコン中に周期的に埋め込まれたリン不純物の核スピンの用いる文献 1) に端を発する。リン不純物の上部にはゲート電極が位置し、それらに印加する電圧によってリンに束縛された電子スピンの状態を変化させる。この電子スピンの状態変化が、量子ビットとして利用するリンの核スピン状態を接触微細構造相互作用により変化させる。あとは特定の核スピン状態のみが共振をする電磁波を照射することにより量子演算を実行し、最後には核スピン状態を束縛電子のスピン依存トンネル伝導を用いて測定するというのが文献 1) のアイデアである。この文献 1) に刺激された多くの研究者がシリコン中のリン不純物量子状態を調べるようになった。まず重要となるのがリンの電子スピンと核スピンのコヒーレンス時間である。このコヒーレンス時間が目的とする量子アルゴリズムを実行する、または少なくとも量子誤り訂正を実行するのに十分な長さをもてない場合は量子計算中にすべての情報が失われてしまう。リンに束縛された電子スピンに関してはコヒーレンス時間を短縮させる主因である ²⁹Si 安定同位体核スピンを母体シリコンから徹底的に除去することが重要で、その結果として 10 K 以下の低温において 10 ミリ秒以上のコヒーレンス時間が確保できることが実験的に示された^{2,3)}。この時間内には十分な数の量子論理演算の実行が可能であることから、シリコン中のリン電子スピンの有用性が確認された大きな成果といえる。シリコン中のリン核スピンのコヒーレンス時間は電子スピンよりはるかに長いために正確な測定が困難とされるが、重要な点は、既に十分に長く実用性が明らかであるという点である。リンをシリコン中に周期的に配置する技術としては単一リン注入法¹⁴⁾によるデバイス開発が進行中で、既にシリコン中に埋め込まれた 2 個のリン原子の特性評価が報告された⁵⁾。量子演算実行のためには、電子スピンに対しては電子磁気共鳴、核スピンに対しては核磁気共鳴が用いられるが、シリコンの圧倒的に進んだ微細加工技術に基づき共鳴用の電磁波をリン原子部分のみに金属配線などで供給する方法の開発が進められている。選択的な量子ビット操作のためには傾斜磁場が必要であり、磁性金属の微細加工技術が開発されている。量子計算の最後のステップが電子スピンまたは核スピン状態の読み出しであり、これには 2 種類の手法の開発が進んでいる。一つ目は電子磁気共鳴の電気的な検出である。一般的な電子磁気共鳴では共振器中に置かれた試料のわずかな反射率の変化を測定するが、ここでは最低でも 10^{10} 個程度の電子スピンが必要とされる。これでは単一量子ビット測定からほど遠い。そこで着目されたのが電子磁気共鳴により試料の電気抵抗が微妙に変化する現象である。この手法を用いてわずか 50 個のリン電子スピンの検出が報告され⁶⁾、更に単一量子ビットではなく集団の量子ビット測定ではあるがリン電子スピンのコヒーレント量子状態の測定⁷⁾やスピンエコーといった量子操作⁸⁾の成功が報告された。もう一つの読み出しの方法は電子磁気共鳴で用いる共鳴周波数の照射は行わずに、束縛励起子をフォトルミネッセンス励

起分光により生成し、その緩和をフォトルミネッセンスまたは光電流として読み出す方法である⁹⁾。これも集団測定ではあるが、画期的な点は、電子スピンのみならず核スピン状態も光または電流として読み出すことに成功したことである。電流で読み出す方法は単一リン電子スピンと核スピンの読み出しに向けても大変有望な手法である。リンを用いた量子計算の最新の成果は、これも集団演算ではあるが、リンの電子スピンと核スピンを二つの量子ビットとして、電子スピンの状態を核スピんに読み込ませるメモリ動作に成功した報告である¹⁰⁾。文献 1) の提案からわずか 10 年でここまでの進展は予想を上回る成果であり、今後は単一リン不純物の測定が最重要課題である。

リン不純物と並んで開発が進んでいるのが、シリコン中の安定同位体 ^{29}Si 核スピンを用いる量子コンピュータである^{11, 12)}。実際に ^{29}Si 核スピンのコヒーレンス時間は室温においても 25 秒と圧倒的に長いことが示され¹³⁾、 ^{29}Si 核スピンの原子列の作製法も確立され¹⁴⁾、 ^{29}Si 核スピンの初期化に関してもリン電子を用いた動的核スピン分極の可能性が示され¹⁵⁾、 ^{29}Si 核スピンの読み出しでもリン電子スピンと相互作用を用いる手法¹⁶⁾を既に述べた電子磁気共鳴に伴う電気抵抗の変化を測る方法に展開することが有効だと考えられている。

このほかにシリコン中のリチウム (Li)、タリウム (Tl)、トリウム (Th) などの深い準位を用いる方法も提案されている。リンの場合は動作温度が 10 K 以下の低温に限定されるが、深い準位を用いれば動作温度が高められることが期待されている。

(2) ダイヤモンド中の不純物を用いた量子計算研究の現状

ダイヤモンド中の色中心 (カラーセンタ) と呼ばれる欠陥を用いた量子コンピュータの開発が世界中で盛んになっている。特に単一の窒素-空孔中心 (N-V 中心) を用いた量子ビット実験が 2001 年に報告されると¹⁷⁾、N-V 中心を用いた研究が一気に盛んになった。その最新の状況は文献 18) に平易にまとめられているため、読者にはその一読を勧めたい。ダイヤモンド中の N-V 中心を用いた量子計算の特徴は室温動作が可能であり、初期化と演算も単純で、単一 N-V 中心の量子情報の読み出しも光学的に実行できる点である。量子ビットとしては N-V 中心に局在する電子スピンの他に ^{17}N 核スピンや、N-V 中心周辺に存在する母体ダイヤモンドの ^{13}C 核スピンの利用が可能で、これら多数量子ビット間の量子もつれ合い (エンタングルメント) 状態の形成が報告され¹⁹⁾、核スピンを利用した量子メモリや光学的な読み出しを中心とした量子通信への応用に関する実験が急速に進んでいる²⁰⁾。

N-V 中心の高い単一量子ビット操作性のと単一光子源という特徴は、シリコン中のリン不純物の開発を数歩もリードしている。ただし、N-V 中心を用いて実用的な量子コンピュータを実現させるためには、ダイヤモンドの結晶成長と加工技術の進展が不可欠である。このことが 0.35 ミリ秒にとどまっているコヒーレンス時間の延長や、現在の単一 N-V 中心を顕微鏡で探し出すことから始まる基礎研究を素子レベルに発展させる鍵をにぎる。

(3) まとめ

半導体中の不純物を用いた量子ビットの開発状況をシリコンとダイヤモンドを中心に概観した。

シリコンの結晶成長技術と微細加工技術は圧倒的に進んでおり、シリコンで量子コンピュータが実現すれば既存のシリコン集積回路との融合が可能になる魅力がある。他章で紹介されている超電導量子ビットなども結局はシリコン基板上に作製されることから、シリコン量子ビットメモリと超伝導量子ビット演算素子を融合させた複合型量子コンピュータなどの展開

にも期待が高まる。ただし、シリコンを用いたすべての成果が集団量子ビットを用いた実験であり、これを単一量子ビットに発展させることが急務である。

ダイヤモンドは室温動作や単一光子源として量子通信への応用ができる魅力を有し、半導体中の不純物量子ビットとしては最有力候補として注目される一方、結晶成長技術や微細加工技術の困難を克服して素子化に展開する技術の開発が実用上は不可欠である。

半導体中で有望視されている不純物量子ビットの種類は本稿で述べたように少数に限定されているが、これはただ探索的研究の欠如に起因していると考えられる。今後はシリコン、ダイヤモンド、ゲルマニウムといった同位体操作により核スピンを含まない状況が実現できる半導体を中心に、様々な不純物量子ビットの可能性が探索され、より良い量子ビットの候補が発見されることも期待される。

参考文献

- 1) B.E. Kane, "A silicon-based nuclear spin quantum computer," *Nature*, vol.393, p.133, 1998.
- 2) A.M. Tyryshkin, S.A. Lyon, A.V. Astashkin, and A.M. Raitsimring, "Electron spin relaxation times of phosphorus donors in silicon," *Phys. Rev. B*, vol.68, p.193207, 2003.
- 3) E. Abe, J. Isoya, and K.M. Itoh, "Pulsed EPR study of spin coherence time of P donors in isotopically controlled Si," *Pysica B*, vol.376-377, pp.28-31, 2006.
- 4) T. Shinada, S. Okamoto, T. Kobayashi, and I. Ohdomari, "Enhancing semiconductor device performance using ordered dopant arrays," *Nature*, vol.437, p.1128, 2005.
- 5) S.E.S. Andresen, R. Brenner, C.J. Wellard, C. Yang, T. Hopf, C.C. Escott, R.G. Clark, A.S. Dzurak, D.N. Jamieson, and L.C.L. Hollenberg, "Charge state control and relaxation in an atomically doped silicon device," *Nano Lett.*, vol.7, p.2000, 2007.
- 6) D.R. McCamey, H. Huebl, M.S. Brandt, W.D. Hutchison, J.C. McCallum, R.G. Clark, and A.R. Hamilton, "Electrically detected magnetic resonance in ion-implanted Si:P nanostructures," *Appl. Phys. Lett.*, vol.89, p.182115, 2006.
- 7) A.R. Stegner, C. Boehme, H. Huebl, M. Stutzmann, L. Lips, and M.S. Brandt, "Electrical detection of coherent ^{31}P spin quantum states," *Nat. Phys.*, vol.2, p.835, 2006.
- 8) H. Huebl, F. Hoehne, B. Grolik, A.R. Stegner, M. Stutzmann, and M.S. Brandt, "Spin echoes in the charge transport through phosphorus donors in silicon," *Phys. Rev. Lett.*, vol.100, p.177602, 2008.
- 9) A. Yang, M. Steger, D. Karaiskaj, M.L.W. Thewalt, M. Cardona, K.M. Itoh, H. Riemann, N.V. Abrosimov, M.F. Churbanov, A.V. Gusev, A.D. Bulanov, A.K. Kaliteevskii, O.N. Godisov, P. Becker, H.-J. Pohl, J.W. Ager III, and E.E. Haller, "Optical detection and ionization of donors in specific electronic and nuclear spin states," *Phys. Rev. Lett.*, vol.97, p.227401, 2006.
- 10) J.J.L. Morton, A.M. Tyryshkin, R.M. Brown I, S. Shankar, B.W. Lovett, A. Ardavan, T. Schenkel, E.E. Haller, J.W. Ager, and S.A. Lyon, "Solid-state quantum memory using the ^{31}P nuclear spin," *Nature*, vol.455, p.1085, 2008.
- 11) T.D. Ladd, J.R. Goldman, F. Yamaguchi, Y. Yamamoto, E. Abe, and K.M. Itoh, "All-silicon quantum computer," *Phys. Rev. Lett.*, vol.89, p.017901, 2002.
- 12) K.M. Itoh, "An all-silicon linear chain NMR quantum computer," *Solid State Commun.*, vol.133, p.747, 2005.
- 13) T.D. Ladd, D. Maryenko, Y. Yamamoto, E. Abe, and K.M. Itoh, "Coherence time of decoupled nuclear spins in silicon," *Phys. Rev. B*, vol.71, p.014401, 2005.
- 14) T. Sekiguchi, S. Yoshida, and K.M. Itoh, "Self-assembly of parallel atomic wires and periodic clusters of silicon on a vicinal Si(111) surface," *Phys. Rev. Lett.*, vol.95, p.106101, 2005.

- 15) H. Hayashi, K.M. Itoh, and L.S. Vlasenko, "Nuclear magnetic resonance linewidth and spin diffusion in ^{29}Si isotopically controlled silicon," *Phys. Rev. B*, vol.78, p.153201, 2008.
- 16) E. Abe, K.M. Itoh, J. Isoya, and S. Yamasaki, "Electron-spin phase relaxation of phosphorus donors in nuclear-spin-enriched silicon," *Phys. Rev. B*, vol.70, p.033204, 2004.
- 17) J. Wrachtrup, S.Y. Kilin, and A.P. Nizovtsev, "Quantum computation using the ^{13}C nuclear spins near the single NV defect center in diamond," *Optics and Spectroscopy*, vol.91, p.429, 2001.
- 18) S. Praver and A.D. Greentree, "Diamond for quantum computing," *Science*, vol.320, p.1601, 2008.
- 19) P. Neumann, N. Mizuochi, F. Rempp, P. Hemmer, H. Watanabe, S. Yamasaki, V. Jacques, T. Gaebel, F. Jelezko, and J. Wrachtrup, "Multipartite entanglement among single spins in diamond," *Science*, vol.320, p.1326, 2008.
- 20) M.V. Gurudev Dutt, L. Childress, L. Jiang, E. Togan, J. Maze, F. Jelezko, A.S. Zibrov, P.R. Hemmer, and M.D. Lukin, "Quantum register based on individual electronic and nuclear spin qubits in diamond," *Science*, vol.316, p.1312, 2007.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-12 半導体量子ドットを用いた量子計算

(執筆者：藤澤利正)[2008年5月受領]

少数個の電子や正孔を含む半導体量子ドットによる量子ビットの基本動作を中心にして、量子計算に向けた研究の現状を概観する。

3-12-1 半導体量子ドット材料

半導体量子ドットは数 nm から数 100 nm 程度の微小な半導体構造で、量子閉じ込め効果により離散的なエネルギー状態が形成されている。電気測定に用いられる量子ドットと、光学測定に用いられる量子ドットがあり、様々な材料によって作製されている。GaAs や InAs などの化合物半導体を中心に研究が行われているが、II-VI 族半導体やシリコン、半導体ナノワイヤを用いた量子ドットの研究も盛んで、グラフェン(2層グラフェン)による量子ドットにも興味もたれている。また、フラーレンやカーボンナノチューブなどの分子、半導体中の欠陥準位も量子ドットの類似として考えられる。

電気測定では、トンネル障壁を介して電子(または正孔)を出し入れする必要があり、またゲート電極によって量子ドットのポテンシャルやトンネル障壁のトンネル速度を調整できることが望ましい。量子計算に用いるためには、量子ドットを集積化可能であることや、各々の量子ドットの電子数やポテンシャルを設定できることなどが要求されるため、リソグラフィによって量子ドットを作製する手法が広く用いられる。電気信号によって量子ビットを制御するため、柔軟なプログラムが可能である。

一方、光学測定では、光学遷移によって励起子(電子正孔対)を生成し、発光再結合や反射透過測定によって状態を観測する。直接遷移型のバンド構造を有する必要があり、GaAs 量子井戸構造(井戸幅の不均一により量子ドットが形成される)や InAs, InGaAs などの自己形成型量子ドット、化学合成された半導体ナノ粒子を用いた研究が盛んである。光学測定では、ピコ秒程度の短パルス光による高速制御に魅力がある。

また、電気伝導と光学測定を組み合わせた実験も可能で、光励起された電子・正孔の片方を選択的に電極に出すことにより電流として観測するとともに、他方の粒子を寿命の長い状態にとどめておくことができる。

3-12-2 量子ビットの基底

半導体量子ドットにおける量子ビット(二準位系)の基底としては、単一量子ドット中に形成される異なる二つの電子軌道や、一つの電子が二つの量子ドット(二重量子ドット)の軌道を占有する電荷状態(電荷量子ビット)、光励起で生成される励起子の有無(励起子量子ビット)、電子スピン状態(スピン量子ビット)、価電子帯の正孔のスピン状態(正孔スピン量子ビット)などに関する研究が進められている。

電子軌道を量子ビットとして用いるアイデアは初期の理論提案¹⁾で想定されていたが、良い量子数の軌道を有する対称性の高い量子ドットポテンシャルを作製することは容易でなく現実的でない。電荷量子ビットは、片方のドットに局在した電子軌道を用いるもので、ゲート電圧などにより軌道のエネルギー差やドット間のトンネル結合の大きさを調整することができる²⁾。高速電圧パルスを印加することにより、コヒーレント電荷振動の実験が行われて

おり、比較的大きな電荷ダイポールを有するため、近接する量子ビット間のクーロン相互作用により 2 量子ビット動作が期待される。しかし、化合物半導体ではピエゾ型の電子格子相互作用による緩和が大きくコヒーレンスの高い量子ビットは期待できない。

励起量子ビットは、励起子のエネルギーに相当する波長のレーザー光で共鳴励起することにより、ラビ振動が観測されている³⁾。発光再結合の観測や電界を印加して光電流を観測によって量子ビットの状態を読み出すことができる。2 量子ビット化するためには、励起子のダイポールによって近接する量子ドットの励起子との相互作用を得る必要があり、量子ドットを高精度に近接して整列するための作製技術に課題がある。一つの量子ドット中に 2 個の励起子が形成されたバイエキシトンでは十分に大きなクーロン相互作用が得られ、4 準位系のコヒーレント実験⁴⁾やエンタングルメント光子対の生成に関する実験⁵⁾が行われている。しかし、励起子の場合、その発光寿命（ナノ秒程度）の時間内でしかコヒーレント操作ができないという欠点がある。

電子スピン量子ビットは、外界との結合が弱いことから緩和時間の長い量子ビットとして期待されており⁶⁾、光学測定や電気測定によってコヒーレントなスピン操作の実験が行われている。高周波外部磁場による電子スピン共鳴ではあまり十分な遷移強度が得られないが、半導体バンド構造に起因したスピン軌道相互作用や円偏光励起によるスピン励起によってラビ振動が観測されている。また、半導体量子ドットでは、エネルギー緩和時間（縦緩和時間： T_1 ）が 1 秒を超えるデータが報告されている⁷⁾。しかし、電子スピンと核スピンの間にはたらく超微細相互作用により、電子スピンの位相緩和時間（横緩和時間： T_2 ）は数ナノ秒程度である⁸⁾。これは、平均的には核スピンが偏極していなくても、量子ドットという微小領域に存在する核スピンの個数（典型的 GaAs 量子ドットで 100 万個程度）が有限なために、ある時刻での核スピン集団がつくる有効磁場が 0 とみなせないためである。スピンエコーの手法を用いることによりある程度のコヒーレンスを回復することができるが、核スピン集団をいかに制御できるかが今後の重要な課題であり核スピンをもたない量子ドット材料も注目されている。しかし、このわずかな核スピン磁場を積極的に利用して単一電子スピンのコヒーレント操作を実現している実験例も多い〔本章 3-12-4 参照〕。

正孔スピン量子ビットでは、半導体構成原子の p 軌道から構成できているために超微細相互作用が小さく、核スピンによる位相緩和が小さいと期待される。最近の実験ではミリ秒に近い縦緩和時間が報告されている⁹⁾。重い正孔スピンの場合、合成角運動量 $\pm 3/2$ の間でのコヒーレント操作を行う必要があるが、強いスピン軌道相互作用を利用したコヒーレント制御の実験に期待したい。

3-12-3 電子・正孔スピンの光制御

直接遷移型 III-V 属半導体のバンド構造理論によると、伝導帯は構成原子の s 軌道、価電子帯は p 軌道から構成され、スピン軌道相互作用によって価電子帯は Γ 点で縮退した重い正孔・軽い正孔と、スプリットオフバンドに分裂している。(001) 方向の閉じ込めが強い典型的なディスク状量子ドットにおいては、量子ドットの伝導帯・価電子帯の量子準位は図 3-22(a) のような関係になっており、円偏光に対する光学遷移の選択則が矢印のように現れる¹⁰⁾。この選択則を用いて特定の電子スピン・正孔スピンのみを励起するとともに、スピン状態を偏光特性から調べることができる。また、反射透過特性に表れる偏光変化（カー回転やファラ

デー回転)を調べることによってスピン状態を測定することができる¹¹⁾。

量子ドットに1個の電子が存在する場合に、系を電子スピン量子ビットとみなすことができる。ここで、電子スピン量子ビットの基底を(001)方向(z方向)の成分で考える。y方向の磁場を印加することによってy軸回りのラーモア振動を得ることができ、スピン状態のコヒーレント操作として用いることができる。量子ビットの位相を変化するために、円偏光励起を用いる¹²⁾。円偏光によって励起子(電子正孔対)を生成すると、図3・22(b)のように2電子1正孔(重い正孔)からなるトライオンを励起することができるが、矢印で書かれているように円偏光によって電子とトライオン間の遷移を得ることができる。いま、十分強い光によって2準位にラビ振動が生じる条件において、 2π パルスに相当する右円偏光パルス(σ_+)を照射すると、上向きスピン $|\uparrow\rangle$ だけがラビ振動して位相が反転した $-\uparrow\rangle$ に変化する。この過程は、電子スピン量子ビットの位相を π 変化することができる。類似の位相シフトは、非共鳴の円偏光によるACシュタルク効果によっても得ることができる¹³⁾。位相シフト操作と磁場によるラーモア振動とを組み合わせることにより、電子スピンの任意のコヒーレント操作が可能である。

正孔が1個存在する量子ドットの場合にも同様の選択励起が期待され、正孔スピンの円偏光励起によって正孔2個と電子1個のトライオンを形成することができる。図3・22(c)のように、右向き円偏光(σ_+)を照射すると下向き正孔スピン \downarrow のみを選択的に励起することができるが、励起されたトライオンは電子スピンを含むため核スピンによる磁場を感じて電子スピンは変化し、発光過程(左回り円偏光)により上向き正孔スピン \uparrow 状態が得られる。このような過程によって、効率よく正孔スピン状態を初期化する実験が行われている⁸⁾。

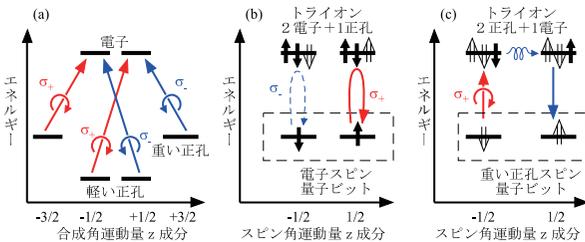


図 3-22 量子ドットの光制御

(a) 量子ドットの伝導帯・価電子帯の電子・正孔状態間に生じる円偏光選択則。(b) 電子スピン量子ビットの位相シフト動作。(c) 正孔スピン量子ビットの初期化

(1) 2電子系2重量子ドットの電気制御

二つの電子スピンを有する2重量子ドットはスピン相関が顕著に表れる系であり、電気伝導測定によって多くの実験がなされている。帯電エネルギー(数 meV 程度)が熱エネルギー(100 mK で約 $10 \mu\text{eV}$)より十分に大きいクーロン閉塞領域では、図3・23(a)のような直列接続二重量子ドットを1個ずつ電子が流れる単一電子トンネル電流が流れる。いま、図3・23(b)のように、右のドットRに電子1個(上向きスピンであるとすると)が常に存在する状況に別の電子1個を左の電極からドットLに注入した場合を考える。ドット間のスピン相関は小

さいので、左のドットに入ってくる電子は上向きスピンのみでも下向きスピンのみでもよい。しかし、一つのドットに2個の電子が存在する場合、電子スピンの1重項相関を取る状態 S と3重項状態 T とで大きくエネルギーが異なる。従って、エネルギー的に1重項しか許されない条件では、ひとたび図のような平行スピンの対が形成されると、ドットLからドットRにトンネルする過程は抑制され電流が流れなくなる（スピンプロックード状態）¹⁴。このスピン依存トンネルは1重項か3重項であることを判別する測定器と考えることができ、下記のような様々な実験が進められている。

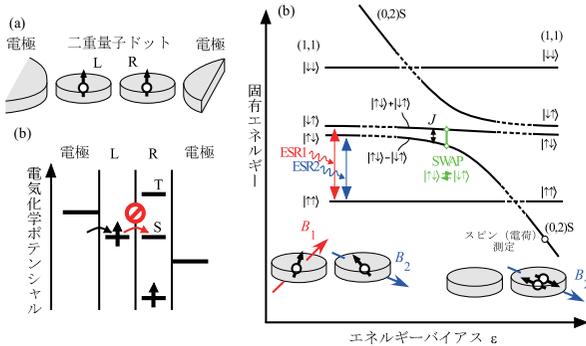


図 3-23 二電子系二重量子ドットの伝導測定

(a) 素子の模式図。(b) スピンプロックード状態のエネルギー図。(c) 2電子スピンの電子スピン共鳴 (ESR2, ESR2), スピン交換 (SWAP), スピン測定におけるエネルギー

今、図 3-23(c) 左下挿入図のように二つの量子ドットに異なる磁場 (B_1, B_2) が印加されている状況を考える。この状況は、核スピン集団がつくる超微細相互作用の有効磁場によって必ず生じており、近くに局所電流を流すことや微小な強磁性体を磁化することによって人為的に不均一磁場を発生することもできる。各量子ドットの基底電子軌道に1個の電子が占有する $(1,1)$ 電荷状態は、スピンの向きの違いにより $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ の4状態がある。ここでは、各スピン状態は各ドットでの磁場の向きを量子化軸として考えることにする。これらの状態とドットRまたはLの2電子1重項状態 $(0,2)S, |(2,0)S$ とのトンネル結合を考慮すると、それらのエネルギーが交差する近傍ではスピン1重項 $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$ と3重項 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ が固有状態となる。量子ドット間のエネルギーバイアス ε を変化すると、系の固有エネルギーは図 3-23(c) のように変化し、高速電圧信号によって ε を変化できる。

この系では電子スピン共鳴によって電子スピン量子ビットを操作することができ、オンチップの短絡コプレーナ導波路に高周波電流を流し量子ドットに高周波磁場を印加することによりラビ振動が観測されている¹⁵。また、高周波電界によって量子ドットの静電ポテンシャルを空間的に振動すると、スピン軌道相互作用や不均一磁場があることにより振動数の早い電子スピン共鳴が得られる¹⁶。二量子ビット操作には、 $(1,1)$ 電荷状態と $(0,2)$ 電荷状態の縮退点近傍で顕著に現れる交換相互作用 J を利用して実現できる。このような条件に適切な時間

だけ相互作用させることにより、各ドットの電子スピンを交換する SWAP ゲートを実現することができる。これらの実験では、スピン状態を測定するためにスピントロニックを用いている。すなわち、(1,1) 電荷状態から (0,2) 電荷状態に変化するのは一重項状態に限られるため、エネルギーバイアスを変化して系が図 3・23(c) 右下挿入図の (0,2) 電荷状態に変化することを電荷計などによって測定することにより、1 重項相関状態であることを確認できる。

興味深いことに、これらの実験では核スピンの揺らぎを利用して二量子ビット操作が実現されている。しかも、超微細相互作用によって核スピンを偏極することができることが知られている¹⁷⁾。電子スピんと核スピンを相互に制御することによりコヒーレンスの高い系への進展が期待されている。

参考文献

- 1) A. Barenco, D. Deutsch, A. Ekert, and R. Jozsa, "Conditional quantum dynamics and logic gates," *Phys. Rev. Lett.*, vol.74, p.4083, 1995.
- 2) T. Hayashi, T. Fujisawa, H.D. Cheong, and Y. Hirayama, "Coherent manipulation of electronic states in a double quantum dot," *Phys. Rev. Lett.*, vol.91, p.226804, 2003.
- 3) H. Kamada, H. Gotoh, J. Temmyo, T. Takagahara, and H. Ando, "Exciton Rabi oscillation in a single quantum dot," *Phys. Rev. Lett.*, vol.87, p.246401, 2001.
- 4) X. Li, Y. Wu, D. Steel, D. Gammon, T.H. Stievater, D.S. Katzer, D. Park, C. Piermarocchi, and L.J. Sham, "An All-Optical Quantum Gate in a Semiconductor Quantum Dot," *Science*, vol.301, p.809, 2003.
- 5) N. Akopian, N.H. Lindner, E. Poem, Y. Berlatzky, J. Avron, and D. Gershoni, B.D. Gerardot, and P.M. Petroff, "Entangled Photon Pairs from Semiconductor Quantum Dots," *Phys. Rev. Lett.*, vol.96, p.130501, 2006.
- 6) D. Loss and D.P. DiVincenzo, "Quantum computation with quantum dots," *Phys. Rev. A*, vol.57, p.120, 1998.
- 7) S. Amasha, K. MacLean, I.P. Radu, D.M. Zumbühl, M.A. Kastner, M.P. Hanson, and A.C. Gossard, "Electrical Control of Spin Relaxation in a Quantum Dot," *Phys. Rev. Lett.*, vol.100, p.046803, 2008.
- 8) J.R. Petta, A.C. Johnson, J.M. Taylor, E.A. Laird, A. Yacoby, M.D. Lukin, C.M. Marcus, M.P. Hanson, and A.C. Gossard, "Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots," *Science*, vol.309, p.2180, 2005.
- 9) B.D. Gerardot, D. Brunner, P.A. Dalgarno, P. Öhberg, S. Seidl, M. Kroner, K. Karrai, N.G. Stoltz, P.M. Petroff, and R.J. Warburton, "Optical pumping of a single hole spin in a quantum dot," *Nature*, vol.451, p.441, 2008.
- 10) F. Meier and B.P. Zakharchenya, "Optical orientation," North-Holland, The Netherlands, 1984.
- 11) D.D. Awschalom, D. Loss, and N. Samarth, "Semiconductor Spintronics and Quantum Computation," Springer, Berlin, 2002.
- 12) Y. Wu, E.D. Kim, X. Xu, J. Cheng, D.G. Steel, A.S. Bracker, D. Gammon, S.E. Economou, and L.J. Sham, "Selective Optical Control of Electron Spin Coherence in Singly Charged GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As Quantum Dots," *Phys. Rev. Lett.*, vol.99, p.097402, 2007.
- 13) J. Berezovsky, M.H. Mikkelsen, N.G. Stoltz, L.A. Coldren, and D.D. Awschalom, "Picosecond Coherent Optical Manipulation of a Single Electron Spin in a Quantum Dot," *Science*, vol.320, pp.349-352, 2008.
- 14) K. Ono, D.G. Austing, Y. Tokura, and S. Tarucha, "Current Rectification by Pauli Exclusion in a Weakly Coupled Double Quantum Dot System," *Science*, vol.297, p.1313, 2002.
- 15) F.H.L. Koppens, C. Buizert, K.J. Tielrooij, I.T. Vink, K.C. Nowack, T. Meunier, L.P. Kouwenhoven, and L.M.K. Vandersypen, "Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot," *Nature*,

vol.442, p.766, 2006.

- 16) K.C. Nowack, F.H.L. Koppens, Yu. V. Nazarov, and L.M.K. Vandersypen, "Coherent Control of a Single Electron Spin with Electric Fields," *Science*, vol.318, pp.1430-1433, 2007.
- 17) J.R. Petta, J.M. Taylor, A.C. Johnson, A. Yacoby, M.D. Lukin, C.M. Marcus, M.P. Hanson, and A.C. Gossard, "Dynamic Nuclear Polarization with Single Electron Spins," *Phys. Rev. Lett.*, vol.100, p.067601, 2008.

S2 群 - 5 編 - 3 章

3-13 超伝導回路を用いた量子計算

(執筆者：中村泰信)[2008年5月受領]

超伝導電気回路を用いた量子ビットの実現方法について説明する．超伝導状態においては金属中の伝導電子がクーパー対を形成し，巨視的な量子状態である超伝導基底状態に凝縮する．超伝導基底状態では，超伝導ギャップエネルギーの存在により，個々の電子の自由度の低エネルギー励起は凍結されている．低エネルギーの励起としてはクーパー対の凝縮体としての集団運動自由度に関するものだけが存在している．その結果，電気抵抗 0 の状態，すなわち散逸を伴わない電気回路が実現し，巨視的なスケールでありながらその量子力学的な振舞いを利用することが可能になる¹⁾．

超伝導量子ビットの研究は，量子ビットという言葉が生まれる以前の 1980 年代初頭から，「巨視的量子コヒーレンス」という興味のもとに行われてきた²⁾．1980 年代には「巨視的量子トンネリング」の実証が行われ，電子の集団運動自由度の量子化とトンネリングの存在が確認された³⁾．1990 年代半ばからの量子計算研究の興隆に刺激され，1999 年に初めてのコヒーレントな量子ビット動作が示された後⁴⁾，多くの進展が見られている^{5, 6, 7)}．

超伝導量子ビットを用いた量子計算の実現に向け，現在も研究が続けられている．これまでに，個々の量子ビットの制御と読み出し，結合した量子ビット間での相互作用の制御とエンタングルメントの実証などが行われている．また量子ビットと，量子情報バスとしての超伝導共振器との結合の実証は，集積化へ向けた新たな方向性を提示した．本節後半では超伝導量子ビット研究の現状と課題について説明する．

3-13-1 超伝導量子ビット

超伝導電気回路は散逸のない線形の回路要素すなわちインダクタやキャパシタを提供する．したがって適当な回路パラメータを用いればマイクロ波領域の共振周波数をもつ LC 共振回路をつくることができる(図 3-24(a))．十分に低温の環境のもとでは，この LC 共振回路すなわち調和振動子の量子化準位の効果が如実に現れ，共振回路全体が一つの量子力学系として振舞う．例えば， $L = 100 \text{ pH}$ と $C = 2.5 \text{ pF}$ をもつ共振器では共振周波数 $1/(2\pi\sqrt{LC})$ がおよそ 10 GHz となり，その量子化された励起エネルギーを温度に換算すれば約 0.5 K となる*．ヘリウム希釈冷凍機を用いて到達可能な 10 mK 程度の温度環境下では，この共振器の基底状態が実現される．

ところが調和振動子のエネルギー準位は等間隔に分布するため，後で述べるように量子ビットとして利用するには不向きである．そこで回路に非調和性を導入してエネルギー準位が等間隔でなくなるようにするために用いられるのがジョセフソン接合である．ジョセフソン接合は，超伝導体と超伝導体の間に薄い絶縁体バリア[†]を挟んだトンネル接合である⁸⁾．クーパー対はバリアをトンネルして超伝導電流を運ぶ．臨界電流以下の電流が流れているときには，

* 通常，超伝導体として用いられているのは Al (臨界温度 $T_c \sim 1 \text{ K}$)，Nb ($T_c \sim 9 \text{ K}$) などの金属である．励起エネルギーを超伝導ギャップエネルギー Δ より大きくすると，量子ビットの制御の際に個々の電子の励起を引き起こしてしまうので，超伝導ギャップエネルギー (Al で約 50 GHz) がその上限となる．またマイクロ波工学の観点から扱いやすい 1 ~ 10 GHz 程度の共振周波数が通常選択されている．

† Al 酸化膜が主に用いられている．

接合は散逸を伴わない非線形インダクタとして振舞う。

図 3・24 を用いて超伝導量子ビットの構成を説明する。図 3・24(a) の LC 共振回路のもつ全エネルギーは、キャパシタに蓄えられた静電エネルギーとインダクタに蓄えられた磁気的エネルギーの和として $q^2/2C + \Phi_0^2(\theta^2/2L)$ と書ける。ここで $q(t) \equiv \int^t I(t')dt'$ はキャパシタに蓄えられた電荷を、 $\theta(t) \equiv (1/\Phi_0) \int^t V(t')dt'$ はインダクタの両端の間の位相差を、 $\Phi_0 \equiv h/2e$ は量子化磁束を表す。 h はプランク定数、 e は素電荷である。量子力学の世界では演算子 q と θ は共役の関係にあり、交換関係 $[q, \theta] = 2ei$ を満たす。そこで $q \rightarrow 2ei(\partial/\partial\theta)$ の関係を用いて、全エネルギーの演算子 (ハミルトニアン) は $H = -4E_C(\partial^2/\partial\theta^2) + \Phi_0^2(\theta^2/2L)$ と書き直すことができ、 θ 空間で見たときには第 2 項の放物線型閉じ込めポテンシャル中を第 1 項に相当する運動エネルギーをもって運動する仮想粒子の系と等価であることが分かる。 $E_C = e^2/2C$ はキャパシタに単一電子が帯電しているときのエネルギーである。この系の量子化準位は等間隔となる。

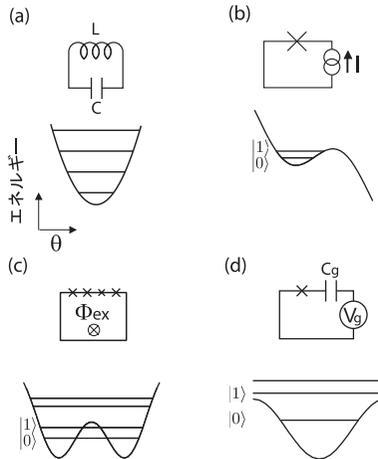


図 3・24 超伝導量子ビット回路とそのエネルギー準位

(a) LC 共振回路。 (b) 位相量子ビット ($E_J \gg E_C$)。 (c) 磁束量子ビット ($E_J > E_C$)。 (d) 電荷量子ビット ($E_J < E_C$)。 ×印はジョセフソン接合を表す

一方ジョセフソン接合は非線形なインダクタとして働き*、そこに蓄えられるエネルギーは $-E_J \cos \theta$ となる。ここで $E_J = h\Delta/8e^2R$ はジョセフソンエネルギーと呼ばれ、 R は常伝導状態におけるトンネルバリア抵抗である。これを導入した超伝導量子ビット回路では、 \cos 関数を反映して閉じ込めポテンシャルが非調和型となり、その結果量子化準位は非等間隔となる。エネルギーの最も低い二つの準位に注目することで、有効 2 準位系すなわち量子ビットを実現する。ジョセフソンエネルギー E_J と単一電子帯電エネルギー E_C の大小関係及び回路構成の違いによって位相・磁束・電荷といった異なるタイプの超伝導量子ビットが実現する。図 3・24(b) の位相量子ビット⁹⁾では、大きいジョセフソンエネルギーをもつ接合に電流バイア

* ジョセフソン接合は並列に付随したキャパシタンス成分も持っている。

スを加え、 \cos ポテンシャルを傾けることで浅いポテンシャル井戸をつくり出し、量子ビットを実現する。電流バイアス I_b により、エネルギー準位間隔を制御できる。図 3・24(c) の磁束量子ビット¹⁰⁾では、量子化磁束の半分 $0.5\Phi_0$ に相当する外部磁束に貫かれた超伝導ループにおいて、超伝導ループのインダクタンスのもつ放物線ポテンシャルと \cos ポテンシャルの足し合せから二重井戸ポテンシャルをつくり出す。左右の井戸内の状態が、ループに流れる周回電流の異なる向きに対応しており、それらの重ね合せ状態が量子ビットの固有状態となる。回路構成上では、超伝導ループのインダクタンスを、複数の直列ジョセフソン接合で置き換えることもできる（図 3・25 参照）。外部磁束 Φ_{ex} により、エネルギー準位間隔が変化する。図 3・24(d) の電荷量子ビット⁴⁾では、小さいジョセフソン接合によってグラウンドと接続された超伝導電極に蓄えられるクーパ対の数が量子化される。 θ 空間では \cos ポテンシャル中を大きい運動エネルギーをもって運動する粒子と等価なので、電荷の量子化状態は周期ポテンシャル中に広がったブロッホ状態に対応している。そのエネルギー準位はゲートキャパシタ C_g を介して印加されるゲート電圧 V_g によって制御することができる。

3-13-2 量子計算に向けた進展と課題

(1) 1 ビット制御

1 ビットの制御には主に共鳴マイクロ波パルスを用いて誘起されるラビ振動が用いられる^{9, 10, 11)}*。パルスの強度に応じて $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の状態間の遷移周期が変化し、またパルス幅に応じて任意の重ね合せ状態を実現することができる。1 ビット制御に要する時間は 1 ~ 10 ns である。

(2) 量子ビット間の相互作用と 2 ビットゲート

2 ビットゲート演算を行うためには、量子ビット間の相互作用を制御する必要がある。隣接する二つの量子ビット間ではキャパシタンスやインダクタンスを介して強い相互作用を得ることができる。図 3・25(a) は相互インダクタンス M で結合した磁束量子ビットの例である。一方の量子ビットの状態に依存して、制御パルスに対する他方の量子ビットの応答が変化するので、条件付演算としてはたらく。これを用いた 2 ビット間の論理制御の基本的実証がいくつか行われている^{12, 13)}。また量子状態トモグラフィを用いたエンタングルメントの評価¹⁴⁾、量子プロセストモグラフィを用いた 2 ビットゲートの忠実度の測定も行われている¹⁵⁾。

上のような結合方式では、量子ビット間の相互作用の大きさが固定されていて、相互作用を必要に応じてオンオフすることができない。この問題を解決するために、可変的な結合方式も実証されている。図 3・25(b) の例では、二つの磁束量子ビットの間に、非線形磁束トランスフォーマーとして、もう一つの励起エネルギーのずっと大きい磁束量子ビットが置かれている。この結合用量子ビットに、外側の二つの量子ビットの共鳴周波数の和あるいは差の周波数のマイクロ波パルスを加えることで、その非線形性を利用した 2 ビットゲートが媒介される¹⁶⁾。2 ビットゲートに有する時間はおよそ 10 ~ 100 ns である。

* 調和振動子の場合、制御用のマイクロ波パルスが状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の間だけでなく、ほかの遷移にも共鳴してしまうため、有効 2 準位系として扱うことができなくなってしまうのが問題である。

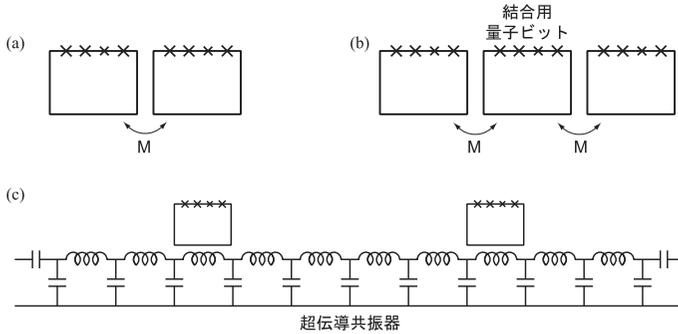


図 3-25 超伝導磁束量子ビット間の結合方式

(a) 相互インダクタンスによる結合．(b) 非線形磁束変圧器を介した可変結合．(c) 超伝導線形共振器を介した結合

(3) 超伝導共振器を用いた量子情報バス

隣接する量子ビットどうししか相互作用できないという制限があると、空間的に離れた量子ビット間の演算において量子ビット列に沿った多数のスワップ操作を用いる必要があり、計算ステップの増大を招く．超伝導回路では、ストリップラインやコプレーナ線路などのマイクロ波伝送線路で構成される、分散定数型の低損失の超伝導共振器を容易に実現することができる．これらの共振器と量子ビットを電気的あるいは磁氣的に結合させて、量子情報をやりとりすることが可能である^{17, 18)}．一つの共振器に複数の量子ビットを結合した回路で、離れた量子ビット間での量子情報の受け渡し¹⁹⁾や 2 ビットゲート動作の実証²⁰⁾が行われている．ここでは結合のオンオフは、量子ビットの共鳴周波数を変化させ共振器に対して共鳴・非共鳴とすることにより制御している．

(4) 読み出し

超伝導量子ビットの読み出し方法の一つとして、ジョセフソン接合のスイッチングを利用するものがある．接合を流れる電流を臨界電流に近付けたときに超伝導電流状態から有限電圧状態へスイッチする確率が、量子ビットの状態に大きく依存することを利用する．これまで位相量子ビットや磁束量子ビットで主に使用され、位相量子ビットの読み出しでは 90 % 程度の読み出し効率を達成している²¹⁾．しかしながらこの方式では、接合が散逸を伴う電圧状態にスイッチした後に大きな電磁氣的ノイズを発生し、周辺の量子ビットの状態を乱してしまうという欠点がある．

読み出しで射影された後の量子ビットの状態を乱さない方法として、分散的に量子ビットと結合した超伝導共振器を用いるものがある^{22, 23)}．量子ビットと超伝導共振器が非共鳴条件下にあるときは、両者間のエネルギーの交換は行われないが、相互作用により共振器の共振周波数は量子ビットの状態に依存した微小な変化を受ける．これを検出することで、量子ビットの読み出しを行うものである．読み出しに要する時間は 10 ~ 100 ns である．

(5) デコヒーレンス

巨視的な固体素子からなる電気回路の利点として、上で述べたような設計や制御の大きな自由度があげられる．その反面、巨視的ということは内部に多くの潜在的な微視的自由度を

有することである．それらの隠された自由度を完全に統率しきれないときに起こるのが，量子ビットの量子状態の乱れ，デコヒーレンスである．設計段階で予測される超伝導量子ビットのデコヒーレンスは，主に制御・読み出し回路に付随する電磁気モードの励起によるものである．この要因によりコヒーレンスが失われる時間スケールは少なくとも 1 ms 程度までは容易に伸ばせると考えられる²⁴⁾．しかしながらこれまでの実験では数 μs の間しかコヒーレンスが保たれておらず，その原因究明が進められている．トンネルバリア・電極表面・基板中などに存在する欠陥に付随する微視的自由度の関与が疑われており，材料科学的なアプローチも必要となってきた．

(6) 集積化へ向けたアーキテクチャ

大規模な集積化へ向けたアーキテクチャに関しては，いくつかの提案があるが^(25, 26, 27)，今後の更なる発展が期待される．断熱量子計算を，超伝導量子ビットを用いて行う提案もなされている²⁸⁾．

参考文献

- 1) M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.
- 2) A.J. Leggett, "Quantum mechanics at the macroscopic level, in Chance and Matter," ed. by J. Souletie, J. Vannimenus, and R. Stora, pp.395-506, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- 3) M. Devoret, J.M. Martinis, and D. Esteve, "Experimental observation of the quantum behavior of a macroscopic degree of freedom, in Chance and Matter," ed. by J. Souletie, J. Vannimenus, and R. Stora, pp.509-523, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- 4) Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J.S. Tsai, "Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box," Nature, vol.398, pp.786-788, 1999.
- 5) Yu. Makhlin, A. Shnirman, and G. Schön, "Quantum-state engineering with Josephson-junction devices," Rev. Mod. Phys., vol.73, pp.357-400, 2001.
- 6) M.H. Devoret and J.M. Martinis, "Superconducting qubits," in Quantum Entanglement and Information Processing, ed. by D. Esteve, J.-M. Raymond, and J. Dalibard, pp.443-486, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- 7) J.M. Martinis, "Superconducting qubits and the physics of Josephson junctions," in Quantum Entanglement and Information Processing, ed. by D. Esteve, J.-M. Raymond, and J. Dalibard, pp.487-520, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- 8) A. Barone and G. Paternò, Physics and applications of the Josephson effect, John-Wiley & Sons, New York, 1982.
- 9) J.M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, "Rabi oscillations in a large Josephson-junction qubit," Phys. Rev. Lett., vol.89, p.117901, 2002.
- 10) I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij, "Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit," Science, vol.399, pp.1869-1871, 2003.
- 11) D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M.H. Devoret, "Manipulating the quantum state of an electrical circuit," Science, vol.296, pp.886-889, 2002.
- 12) T. Yamamoto, Yu. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J.S. Tsai, "Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits," Nature, vol.425, pp.941-944, 2003.
- 13) J.H. Plantenberg, P.C. de Groot, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij, "Demonstration of controlled-NOT quantum gates on a pair of superconducting quantum bits," Nature, vol.447, pp.836-839, 2007.
- 14) M. Steffen, M. Ansmann, R.C. Bialczak, N. Katz, E. Lucero, R. McDermott, M. Neeley, E.M. Weig, A.N. Cleland, and J.M. Martinis, "Measurement of the entanglement of two superconducting qubits via state tomography," Science, vol.313, pp.1423-1425, 2006.

- 15) M. Neeley, M. Ansmann, R.C. Bialczak, M. Hofheinz, N. Katz, E. Lucero, A. O'Connell, H. Wang, A.N. Cleland, and J.M. Martinis, "Process tomography of quantum memory in a Josephson-phase qubit coupled to a two-level state," *Nat. Phys.*, vol.4, pp.523-526, 2008.
- 16) A.O. Niskanen, K. Harrabi, F. Yoshihara, Y. Nakamura, S. Lloyd, and J.S. Tsai, "Quantum coherent tunable coupling of superconducting qubits," *Science*, vol.316, pp.723-726, 2007.
- 17) A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, "Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics," *Nature*, vol.431, pp.162-167, 2004.
- 18) A. Blais, J. Gambetta, A. Wallraff, D.I. Schuster, S.M. Girvin, M.H. Devoret, and R.J. Schoelkopf, "Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics," *Phys. Rev. A*, vol.75, p.032329, 2007.
- 19) M.A. Sillanpää, J.I. Park, and R.W. Simmonds, "Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity," *Nature*, vol.449, pp.438-442, 2007.
- 20) J. Majer, J.M. Chow, J.M. Gambetta, J. Koch, B.R. Johnson, J.A. Schreier, L. Frunzio, D.I. Schuster, A.A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, "Coupling superconducting qubits via a cavity bus," *Nature*, vol.449, pp.443-447, 2007.
- 21) E. Lucero, M. Hofheinz, M. Ansmann, R.C. Bialczak, N. Katz, M. Neeley, A.D. O'Connell, H. Wang, A.N. Cleland, and J.M. Martinis, "High-fidelity gates in a Josephson qubit," *Phys. Rev. Lett.*, vol.100, p.247001, 2008.
- 22) A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, "Approaching unit visibility for control of a superconducting qubit with dispersive readout," *Phys. Rev. Lett.*, vol.95, p.060501, 2005.
- 23) I. Siddiqi, R. Vijay, M. Metcalfe, E. Boaknin, L. Frunzio, and M.H. Devoret, "Dispersive measurements of superconducting qubit coherence with a fast latching readout," *Phys. Rev. B*, vol.73, p.054510, 2006.
- 24) J. Koch, T.M. Yu, J. Gambetta, A.A. Houck, D.I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, "Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box," *Phys. Rev. A*, vol.76, p.042319, 2007.
- 25) T.P. Spiller, K. Nemoto, S.L. Braunstein, W.J. Munro, P. van Loock, and G.J. Milburn, "Quantum computation by communication," *New J. Phys.*, vol.8, p.30, 2006.
- 26) A.G. Fowler, W.F. Thompson, Z. Yan, A.M. Stephens, and F.K. Wilhelm, "Long-range coupling and scalable architecture for superconducting flux qubits," *Phys. Rev. B*, vol.76, p.174507, 2007.
- 27) F. Helmer, M. Mariantoni, A.G. Fowler, J. von Delft, E. Solano, and F. Marquardt, "Cavity grid for scalable quantum computation with superconducting circuits," *EPL*, vol.85, p.50007, 2009.
- 28) W.M. Kaminsky, S. Lloyd, and T.P. Orlando, "Scalable superconducting architecture for adiabatic quantum computation," pp.1-5, 2004, arXiv: quant-ph/0403090.