■S3 群(脳・知能・人間)－ 4 編(ソフトコンピューティングとニューラルネットワーク)

2 章 ファジィ

(執筆者:鬼沢武久)[2008 年 9 月 受領]

■概要■

ファジィ理論は,ファジィ集合論,ファジィ論理,ファジィ測度・ファジィ積分から構成されている.ファジィ集合論,ファジィ論理,ファジィ測度・ファジィ積分それぞれは,通常の集合論,論理,測度・積分の考え方を含んでいるとの意味からすると通常の集合論,論理,測度・積分の拡張になっている.したがってファジィ集合論,ファジィ論理,ファジィ測度・ファジィ積分は,通常の集合論,論理,測度・積分の拡張的な特徴のほかにファジィ独特の特徴を有している.本章ではこれらについて簡単に紹介する.

【本章の構成】

本章でははじめに(2-1 節)で,ファジィの考え方,その歴史,いろいろな様相のあいまいさを簡単に述べる.そしてファジィ集合論(2-2 節),ファジィ論理(2-3 節),ファジィ測度とファジィ積分(2-4 節)に関して,通常の集合論,論理,測度・積分の拡張になっている点,及びファジィ独自の特徴について述べる.

ファジィ集合論では,通常の集合であるクリスプ集合と対比させてファジィ集合の定義,ファジィ集合の演算を紹介する.その後,ファジィ集合特有の性質,クリスプ集合とファジィ集合とを結びつける分解定理,ファジィ関係,ファジィ集合の写像への拡張のための拡張原理について触れる.

ファジィ論理では,命題にファジィ的な主張を含んだファジィ命題とその真理値であるファジィ真理値について触れる.次に,複合命題の真理値を計算する論理演算,ファジィ論理関数,真理値限定,逆真理値限定について述べる.そして最後に,ファジィ論理で一番重要な概念であるファジィ推論を紹介する.

ファジィ測度とファジィ積分では,まず加法性の制約をはずしたファジィ測度の数学定義について触れる.次に,ルベーグ測度,確率測度,可能性測度などのファジィ測度の例を紹介する.そしてまず,ルベーグ積分について述べ,その後,ファジィ測度に関する積分としてショケ積分,シポシュ積分,菅野積分を紹介する.

■S3 群 - 4 編 - 2 章

2-1 はじめに

(執筆者:鬼沢武久)[2010 年 11 月 受領]

ファジィ理論は,カリフォルニア大学バークレイ校の L.A. Zadeh 教授が 1965 年 Information and Control 誌に Fuzzy Sets[1] という論文を発表したことに端を発している.この考え方は 0 か 1 かの二値的な情報だけでなく,「背が高い」「温度が低い」といったあいまいな情報も扱えるという特徴がある.しかし,この論文が発表された当初はあまり注目されず,一握りの研究者の間で細々と研究が進められていたにすぎなかった.それどころか「そのようなあいまいさは確率論でも処理できる」といった批判,「あいまいさを排除すべき科学の世界にあいまいさを持ち込む」ことへの批判が相次いだ.極めつけは 1972 年に開催された Man & Computer の国際会議での Zadeh 教授と Kalman 教授の論戦で,その一部を以下に紹介する[2].

Zadeh: 「もしマイクが多くの親友よりずっと背が高いとすると,マイクの身長はどのくらいか」という問題の解が,古典的な数学の概念的枠組みの中にあることを私はもはや信じない.

Kalman: 疑問は Zadeh 教授が正確な論法を捨てファジィ概念とファジィアルゴリズムに頼ってよりよい事ができるかである.彼が自明でない問題を解くことができるという証拠はない.

Zadeh: 私のアイディアが複雑でファジィなシステムの解析に対する有効な道具に発展するかどうかは時間がたてば分かるであろう.

こういった批判に対して地道にファジィ概念に基づいたアイディアを発表し続けた Zadeh 教授の努力,そしてファジィ概念の有効性を感じとっていた少数の研究者達の地道な研究努力によって,ファジィ概念が理解されるようになり,応用研究も進むようになった.その主導的役割を果たしたのが日本の研究者達であった.1978 年に国際学術雑誌 Fuzzy Sets and Systems が発刊,1984 年国際ファジィシステム学会(IFSA)が設立されるなか,1987 年には第 2 回 IFSA 国際会議が東京で開催されている.一方,日本国内での活動に目を向ければ,1985 年 IFSA 日本支部が発足し,この年に第 1 回ファジィシステムシンポジウムが開催されている.また,1989 年には日本ファジィ学会(現日本知能情報ファジィ学会)が設立され,2009 年には 20 周年を迎えた.1989 年には通商産業省(当時)の指導のもと,国際ファジィ工学研究所(LIFE)が設立され,世界の主たる研究者が集い,ファジィ技術やその応用を展開させ,ファジィ研究の成果を世界に発信していった[3].さて,ファジィ理論はあいまいさを扱う理論と言ってもそのあいまいさにはいろいろな様相がある.それについて以下に説明する.

(1) 知識不足からくるあいまいさ(incompleteness):知らないことに起因するあいまいさで,必要な知識が得られればこの種のあいまいさは解消する.

(2) 多義性からくるあいまいさ(ambiguity):日本語で「はし」と言っても,「橋」なの

か,「箸」なのか,それとも「端」のことを言っているのか不明確で,何通りもの解釈が可能となる.しかし「はし」が出てくる文脈が分かれば「はし」の意味は理解でき,この種のあいまいさは解消する.

(3) 確率論が対象とするあいまいさ (randomness):ランダムに生起する事象を対象にし,その事象が生起するかどうかに関するあいまいさであり,実際にその事象が生起したかどうかでそのあいまいさは解消する.確率論では現在,Kolmogorov の測度論に基づく確率論が主流であるが,頻度に基づく確率や主観確率といった概念もある.ファジィ理論の一つであるファジィ測度論は,数学的な観点からすると Kolmogorov の測度論に基づく確率論を含んでいる.

(4) 不正確さからくるあいまいさ (impreciseness):情報に誤りが含まれていたり,雑音がのっていたりなど正確な情報がないことからくるあいまいさである.正確な情報が補われればこの種のあいまいさは解消する.

(5) 人間が日常使う言葉に含まれるあいまいさ,主観的なあいまいさ (fuzziness):ファジィ理論が処理するあいまいさはこの種のあいまいさである.「背の高い」人を１万人提示されたとしても「背の高さ」に伴うあいまいさは解消しないように,この種のあいまいさは解消しない.

Fuzziness を対象とするファジィ理論の根底にある考え方とは何であろうか.一つは,対象をミクロにとらえることをせずマクロにとらえて,情報を処理していこうという考え方である.そのために事象の挙動を大局的なモデルで表現するアプローチをとる.つまり,事象の挙動を微分方程式などの数式を使って表現せずに定性的に表現し,情報処理をしようとするものである.ここでは人間の大局的な情報処理では数値や数式を用いず,経験的で直感的な表現を用いていることに注目している.更に,従来の科学が排除してきた人間の主観性も積極的に導入しようとしている.ファジィ理論の根底には,「複雑な実世界のシステムをモデル化するには,情報の正確さをある程度犠牲にしてどの程度まで不正確さを許容できるかを考慮する必要がある.そうすることによってあまり労力をかけずに実システムのモデル化の実現が可能になる.また,実現したシステムのロバスト性も保証される.それは実システムに関する情報にある程度の不正確さを許容することは,すべての情報に反応する必要がなくなるからである」があり,極論すれば,「不必要な正確性を追求せず,不確かさをどこまで許容するのか,あいまいな結果にどこまで耐えられるかを探る方法論」と言える.

ファジィ理論は,ファジィ集合論,ファジィ論理,ファジィ測度・ファジィ積分から構成されるが[4),それではそれぞれで対応するファジネスについて簡単に触れておく.

(1) ファジィ集合論におけるファジネス:集合 X の要素 x が X の部分集合 A に属するかどうかに関して,通常の集合論の場合には属するか属さないかの規準は明確に定まる.一方,ファジィ集合の場合にはその規準は明確には定まらず,その規準の下で要素を区別するときの境界はあいまいである.そしてこのあいまいさは主観的な評価に起因しており,人間それぞれにとって個別的であることを容認するものである.

(2) ファジィ論理におけるファジネス:通常,論理とは,ある命題に対してその真理値を

割り当てることである．そしてこの真理値の割当てにあいまいさがあってはならない．しかし通常の論理の考え方で真理値を明確に割り当てることができない命題がある．その場合，真と偽の中間的な意味合いをもたせるような真理値を論じる多値論理，無限値論理がある．しかし,「太郎さんは背が高い」といった記述に対する真理値はこれらの論理でも論じにくい．何故なら，この記述のなかの「背が高い」という言葉の意味に「ファジィ集合論におけるファジネス」が存在し，このファジネスがこの記述に対する真理値の割当てをあいまいにしているからである．これに対処するのに多値論理で用いられる 0 と 1 との間の実数値，例えば，0.7 と主観的に決めるやり方があるが,「0.7 くらい」「非常に真らしい」というように言葉で表現する真理値で論ずる考え方は多値論理，無限値論理にはなく，ファジィ論理独特のものである．

(3) ファジィ測度論におけるファジネス：人間が何かある対象を評価するとき，人それぞれの物差しを基準にした価値に基づいて評価している．この価値というものは必ずしも足し算（加法性）が成り立つような物差しを規準にしているとは限らないというのが，ファジィ測度論のとる立場である．通常の測度では，加法性の成り立つ物差しを規準にした価値を言い，制約の厳しい物差しということになる．一方，加法性を満たさない物差しを基準にした価値は，例えば，単調性のみを満たすような制約のゆるい物差しを基準にしており，あいまいさが生じてくる．このあいまいさはまさしく，価値観の違いを表しており，その評価対象物に対する主観的な価値観を表していると言える．

ファジィ理論，ニューラルネットワーク，進化的計算，自律エージェントによる学習など複数の分野には，それぞれ得意とする面，不得意とする面があるが，これらを互いに補完しあいながら技術展開をするべく「ソフトコンピューティング」と呼ばれる技術が展開されている[5, 6]．

■参考文献

1) L.A. Zadeh, “Fuzzy Sets,” Information and Control, vol.8, pp.338–353, 1965.
2) 田中英夫, “ファジィ論理の過去・現在・未来,” 日本ファジィ学会誌, vol.1, no.1, pp.48–62, 1989.
3) 技術研究組合国際ファジィ工学研究所　編, “ファジィ思考による知的情報処理,” コンピュータ・エージ社, 1995.
4) 日本ファジィ学会　編, “講座ファジィ,” 1 巻～14 巻，別巻 1，2, 日刊工業新聞社, 1992.
5) L.A. Zadeh, “ファジィ秘術の応用とソフトコンピューティング（座談会抜粋）,” 日本ファジィ学会誌, vol.15, no.2, pp.261–268, 1993.
6) X. Li and D. Ruan, “Discussion on Soft Computing at FLINS’96,” International Journal of Intelligent Systems, vol.13, pp.287–300, 1998.

■S3 群 - 4 編 - 2 章

2-2 ファジィ集合論

（執筆者：鬼沢武久）[2008 年 10 月 受領]

通常，集合とは「ものの集まり」のことをいい，ある要素がその「ものの集まり」に含まれるかどうかは明確に規定できるものとして扱われる．したがって「背の高い人の集まり」といったとき，何 cm の人は背が高い，あるいは背が低いと明確に言い切ることができないため通常の集合という意味では集合として扱えない．しかし帰属度の程度を $\{0,1\}$ から $[0,1]$ に拡張すると，集合としての数学的表現能力が一段と高まる．本節では，「背の高い人の集まり」のような，通常では集合と認められない「ものの集まり」を「ファジィ集合」としてとらえ，ファジィ集合は通常の集合の拡張になっていること，更に，ファジィ集合特有の性質などについて論じる[1, 2]．なお本節では，通常の集合をファジィ集合に対して「クリスプ集合」と記すことにする．

2-2-1 ファジィ集合の定義

全体集合 X のクリスプな部分集合 A を考える．$\forall x \in X$ について x は A に属しているか属していないかのどちらかである．これを $\chi_A(x) : X \to \{0,1\}$ なる関数を用いて定義すると

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{2·1}$$

のようになる．$\chi_A(x)$ を A の特性関数と呼ぶ．帰属度を $\{0,1\}$ 以外に中間の程度も認めようとすると，$\mu_{\widetilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ なる関数を用いて定義することになる．この関数 $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ をメンバーシップ関数と呼び，メンバーシップ関数で定義される集合 $\widetilde{A}$ をファジィ集合と呼ぶ．特性関数 $\chi_A(x)$ の値域は $\{0,1\}$ であり，メンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ の値域は $[0,1]$ であることから，クリスプ集合はファジィ集合の特別な場合とみなすことができる．そういった意味ではファジィ集合はクリスプ集合の拡張になっている．$X = \{x \mid 0 \leq x \leq 10, x$ は実数$\}$ とし，そのクリスプ部分集合として $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x$ は実数$\}$，ファジィ部分集合として $\widetilde{A} = \{x \mid x$ は小さい実数$\}$ としたとき，図 2･1 のように特性関数，メンバーシップ関数がかける．メンバーシップ関数は X の要素 x がファジィ集合 $\widetilde{A}$ に属する度合いとして主観的に決められるものであり，図 2･1(2) のメンバーシップ関数は筆者が主観的に決めたものである．

2-2-2 ファジィ集合の演算

本項では，ファジィ集合の演算として，相等，包含，和集合，共通集合，補集合の定義について述べる．集合への帰属度を $\{0,1\}$ に限ると従来のクリスプ集合の演算の性質を保存するが，0 と 1 以外のときには自由度が出てくるという意味では，ここで紹介する定義以外のほかの定義も可能である．しかし，クリスプ集合の特性関数の定義を特別な場合として含んでいるという意味ではここで述べる定義は自然な拡張になっている[3]．

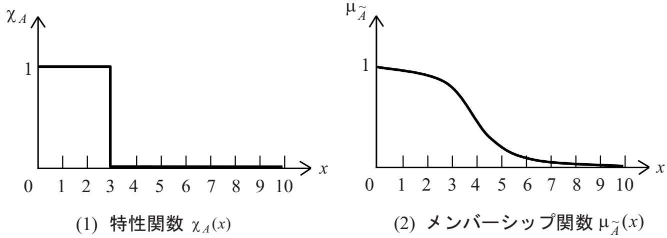

図 2･1　クリスプ集合の特性関数とファジィ集合のメンバーシップ関数

(1) 相等 (=)

二つのファジィ集合 $\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ が等しいとは

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x), \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･2}$$

で定義し，$\widetilde{A} = \widetilde{B}$ と表す．

(2) 包含関係 (部分集合，⊂)

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ がファジィ集合 $\widetilde{B}$ に含まれるとは

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x), \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･3}$$

で定義し，$\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ と表す．このとき，$\widetilde{A}$ は $\widetilde{B}$ の部分集合である．相等と包含関係の間には次のような関係がある．

$$\widetilde{A} = \widetilde{B} \Leftrightarrow \widetilde{A} \subset \widetilde{B} \quad \text{かつ} \quad \widetilde{B} \subset \widetilde{A} \tag{2･4}$$

(3) 和集合 (∪)

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ の和集合 $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ とは

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\}, \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･5}$$

で定義する．

(4) 共通集合 (∩)

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ と $\widetilde{B}$ の共通集合 $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ とは

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\}, \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･6}$$

で定義する．

(5) 補集合 (^{c})

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ の補集合 $\widetilde{A}^c$ とは

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x), \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･7}$$

で定義する．

上記で定義した包含関係, 和集合, 共通集合, 補集合の概念を, メンバーシップ関数を用いて図示すると図 2･2 のようになる．この図から分かるようにド・モルガンの法則 $(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})^c = \widetilde{A}^c\cap\widetilde{B}^c$, $(\widetilde{A}\cap\widetilde{B})^c = \widetilde{A}^c\cup\widetilde{B}^c$，二重否定 $(\widetilde{A}^c)^c = \widetilde{A}$ を満たすが，$\widetilde{A}\cup\widetilde{A}^c \neq X$，$\widetilde{A}\cap\widetilde{A}^c \neq \phi$ のように排中律，矛盾律は満たさない．ただし，ϕ は空集合で，$\mu_\phi(x) \equiv 0$ である．

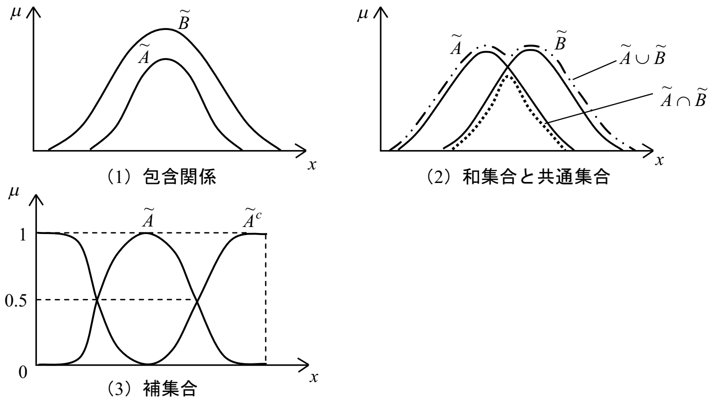

図 2･2　ファジィ集合演算の概念

2-2-3 その他のファジィ集合の演算

前項でも述べたように，集合への帰属度を $\{0, 1\}$ に限ると従来のクリスプ集合の演算の性質を保存するが，0 と 1 以外のときには自由度が出てくるために，和集合，共通集合，捕集合の定義は一意に定まらず，ほかにいくつかの演算が定義されている．ここではその 2, 3 について紹介する．ただし厳密にいうと，これらの演算は集合演算というよりは，ファジィ論理の項で述べる命題の真理値の演算である．

（1）その他の和集合演算

（a）代数和（＋）

$$\widetilde{A}+\widetilde{B} : \mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x) \times \mu_{\widetilde{B}}(x), \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･8}$$

（b）限界和（$\oplus$）

$$\widetilde{A}\oplus\widetilde{B} : \mu_{\widetilde{A}\oplus\widetilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x), 1\}, \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･9}$$

（2）その他の共通集合演算

（a）代数積（×）

$$\widetilde{A}\times\widetilde{B} : \mu_{\widetilde{A}\times\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \times \mu_{\widetilde{B}}(x), \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2･10}$$

(b) 限界積 ($\otimes$)

$$\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} : \mu_{\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}}(x) - 1, 0\}, \quad \text{for} \quad \forall x \in X \tag{2・11}$$

(3) その他の補集合演算

(a) λ －補集合 ($^{c_\lambda}$)

$$\widetilde{A}^{c_\lambda} : \mu_{\widetilde{A}^{c_\lambda}}(x) = \frac{1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)}{1 + \lambda \times \mu_{\widetilde{A}}(x)}, \quad \text{for} \quad \forall x \in X \quad \text{and} \quad \forall \lambda > -1 \tag{2・12}$$

2-2-4 ファジィ集合特有の性質

ファジィ集合論でよく出てくる概念，台集合，正規ファジィ集合，α －レベル集合，凸ファジィ集合，ファジィ数について説明する．

(1) 台集合

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ の台集合 $Supp(\widetilde{A})$ とは，

$$Supp(\widetilde{A}) = \{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0,\ x \in X\} \tag{2・13}$$

で定義されるクリスプ集合で，X の部分集合である．

(2) 正規ファジィ集合

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ が正規ファジィ集合であるとは，そのメンバーシップ値が $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$ となるような $x \in X$ が存在することである．

(3) α －レベル集合

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ の α －レベル集合 とは，

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha,\ x \in X,\ \alpha \in [0, 1]\} \tag{2・14}$$

で定義されるクリスプ集合である．厳密にいうと，強 α －レベル集合と弱 α －レベル集合とに分けて定義されるが，ここではまとめて式 (2・14) で定義しておく．

(4) 凸ファジィ集合

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ が凸ファジィ集合とは，その任意の α －レベル集合が凸集合であることである．全体集合 X を実数の集合とし，任意の実数 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ に対して，区間 $[x_1, x_2]$ 内の任意の実数 x に対して，ファジィ集合 $\widetilde{A}$ のメンバーシップ関数が $\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)\}$ を満たすとき，ファジィ集合 $\widetilde{A}$ は凸集合である．

(5) ファジィ数

ファジィ数とは，実数値の集合で定義された正規で凸ファジィ集合をいう．ファジィ数を用いて「およそ 10 くらい」「約 160cm」などの表現が可能である．

2-2-5 分解定理

ファジィ集合 $\widetilde{A}$ は α －レベル集合というクリスプ集合 $\widetilde{A}_\alpha$ を用いて表現できるというのが分解定理である．ファジィ集合 $\widetilde{A}$ のメンバーシップ関数は，α －レベル集合であるクリス

プ集合 $\widetilde{A}_\alpha$ の特性関数 $\chi_{\widetilde{A}_\alpha}(x)$ を用いて

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} [\min\{\alpha, \chi_{\widetilde{A}_\alpha}(x)\}], \quad \text{for} \quad x \in X \tag{2・15}$$

のように表現できるというものである．この式のイメージを図にすると図 2･3 のようになる．

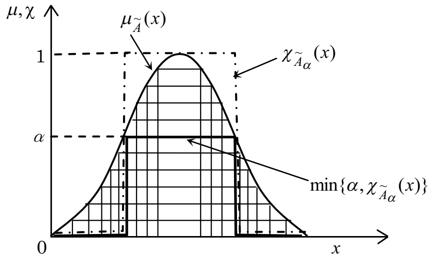

図 2･3　分解定理

この図から分かるように，ファジィ集合は α と α －レベル集合を組み合わせることによって記述できることになる．$[0, 1]$ のある α の値におけるクリスプ集合の処理を行い，この α を $[0, 1]$ の間でソートすることでファジィ集合が得られるというものである．これは，ファジィ集合を α －レベル集合であるクリスプ集合に置き換えて考える方法で，ファジィ集合の処理を行うときやファジィ集合の性質を調べるときの有効な方法の一つである．

2-2-6 ファジィ関係

集合 X と集合 Y との直積を $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ とすると，X と Y との間の関係 R は直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $R \subset X \times Y$ と定義される．この関係 R を特性関数 $\chi_R(x, y)$ を用いて書くと

$$\chi_R(x, y) = \begin{cases} 1: & (x, y) \in R \\ 0: & (x, y) \notin R \end{cases} \tag{2・16}$$

となる．この意味はクリスプ集合の場合と同様，$X \times Y$ のすべての順序対 (x, y) に対して関係 xRy が成立するか，しないかの判定基準が明確な場合を対象としている．これは二つの集合 X と Y との関係で二項関係と呼ばれるものであるが，n 個の集合間の関係 $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ も同様に定義することができ，n 項関係と呼ばれている．

我々の日常生活を見てみると，関係の有無の判定規準がファジィ集合の場合のように不明確な場合が多く，通常の関係だけでは記述できないことが多い．こうした明確でない関係概念を表現するのがファジィ関係である．集合 X と集合 Y とのファジィ関係 $\widetilde{R}$ は $X \times Y$ 上のファジィ集合として定義され，そのメンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$ は

$$\mu_{\widetilde{R}} : X \times Y \ \rightarrow \ [0, 1] \tag{2・17}$$

で表される． n 項ファジィ関係は同様に

$$\mu_{\widetilde{R}} : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \ \rightarrow \ [0,1] \tag{2・18}$$

で表される．

$X \times Y$ 上のファジィ関係 $\widetilde{R}$ の逆ファジィ関係を $\widetilde{R}^{-1}$ と書くと， $\widetilde{R}^{-1}$ は $Y \times X$ 上のファジィ関係であり， $\mu_{\widetilde{R}^{-1}}(y,x) = \mu_{\widetilde{R}}(x,y)$ で定義される．

(1) ファジィ関係の演算

$\widetilde{R}$， $\widetilde{S}$ を $X \times Y$ 上のファジィ関係とする． $\forall x \in X$， $\forall y \in Y$ に対して

ファジィ関係の包含 $\widetilde{R} \subset \widetilde{S}$ ： $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) \leq \mu_{\widetilde{S}}(x,y)$

ファジィ関係の和集合 $\widetilde{R} \cup \widetilde{S}$ ： $\mu_{\widetilde{R} \cup \widetilde{S}}(x,y) = \max\{\mu_{\widetilde{R}}(x,y), \mu_{\widetilde{S}}(x,y)\}$

ファジィ関係の共通集合 $\widetilde{R} \cap \widetilde{S}$ ： $\mu_{\widetilde{R} \cap \widetilde{S}}(x,y) = \min\{\mu_{\widetilde{R}}(x,y), \mu_{\widetilde{S}}(x,y)\}$

(2) ファジィ関係の合成

$\widetilde{R}$ を $X \times Y$ 上のファジィ関係， $\widetilde{S}$ を $Y \times Z$ 上のファジィ関係とすると， $\widetilde{R} \circ \widetilde{S}$ は $X \times Z$ 上のファジィ関係となる．このファジィ関係のメンバーシップ関数は，Sup-min 合成を用いると

$$\mu_{\widetilde{R} \circ \widetilde{S}}(x,y) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_{\widetilde{R}}(x,y), \mu_{\widetilde{S}}(y,z)\} \tag{2・19}$$

のように定義される．なお， X が有限集合の場合は式 (2・19) は Max-min 合成となる．また，用いる合成演算によっていろいろな種類の合成が考えられる．

(3) ファジィ関係の性質

反射的： $\mu_{\widetilde{R}}(x,x) = 1 \quad \text{for} \quad \forall x \in X$

なお，恒等関係 I を

$$\mu_I(x,y) = \begin{cases} 1: & x = y \\ 0: & x \neq y \end{cases} \tag{2・20}$$

と定義すると， $\widetilde{R}$ が反射的ならば $I \subset \widetilde{R}$ である．

対称的： $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) = \mu_{\widetilde{R}}(y,x) = \mu_{\widetilde{R}^{-1}}(x,y) \quad \text{for} \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$

つまり， $\widetilde{R} = \widetilde{R}^{-1}$

推移的： $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) \geq \sup_{\omega} \ \min\{\mu_{\widetilde{R}}(x,\omega), \mu_{\widetilde{R}}(\omega,y)\}$ つまり， $\widetilde{R} \supset \widetilde{R} \circ \widetilde{R}$

反対称的： $\mu_{\widetilde{R}}(x,y) > 0$， $\mu_{\widetilde{R}}(y,x) > 0 \ \Rightarrow x = y$

(4) ファジィ関係の合成による写像

$\widetilde{A}$ を X 上のファジィ集合， $\widetilde{R}$ を $X \times Y$ 上のファジィ関係とすると， $\widetilde{A} \circ \widetilde{R}$ は Y 上のファジィ集合となり，

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{R}}(x,y)\},\ y \in Y \tag{2・21}$$

で定義される．これは， X と Y との間にあるファジィ関係 $\widetilde{R} \subset X \times Y$ が定まっているとすると， X 上の任意のファジィ集合 $\widetilde{A}$ に対応するファジィ集合 $\widetilde{A} \circ \widetilde{R}$ を Y 上に定めるこ

とができることを意味している．したがって図 2･4 に示すように，$\widetilde{A} \subset X$ をファジィ入力，$\widetilde{B} \subset Y$ をファジィ出力としたとき，入出力関係 $\widetilde{R} \subset X \times Y$ をもったファジィシステムとも考えられ，Sup-min 合成によって $\widetilde{B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{R}$ と定めることができる．

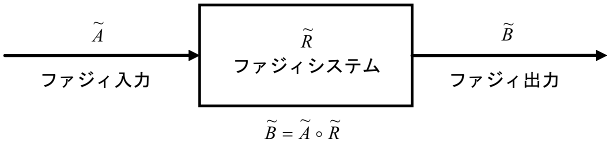

図 2･4　ファジィシステム

2-2-7 拡張原理

集合 X の要素 x を集合 Y のある一つの要素 y に対応させる写像 $f : X \rightarrow Y$ を考える．このとき，$x \in X$ に対して $y \in Y$ が対応しているとき，$y = f(x)$ のように書く．この写像を拡張して，集合から集合への写像として考えることも可能である．$A \subset X$ として

$$f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\} \tag{2･22}$$

と定義する．$f(A) \subset Y$ であり，A の像と言われる．$B \subset Y$ の f による逆像とは，

$$f^{-1}(B) = \{x \mid y = f(x),\ y \in B\} \tag{2･23}$$

で定義され，$f^{-1}(B) \subset X$ である．この集合をクリスプ集合からファジィ集合に拡張するのが拡張原理である．

f を X から Y への写像とするとき，X 上のファジィ集合 $\widetilde{A}$ の f による像 $f(\widetilde{A})$ は

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x), & y \in f(X) \\ 0, & y \notin f(X) \end{cases} \tag{2･24}$$

で定義される．ただし，$f^{-1}(y) = \{x \mid y = f(x),\ y \in f(X)\}$ である．Y 上のファジィ集合 $\widetilde{B}$ の f による逆像は

$$\mu_{f^{-1}(\widetilde{B})}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(f(x)) \tag{2･25}$$

で定義される．

(1) 拡張原理の例

ファジィ集合として，$\widetilde{A} = \{0.1/x_1, 0.4/x_2, 0.3/x_3, 0.9/x_4, 0.2/x_5, 0.7/x_6\}$ の離散的なファジィ集合を考える．ただし，$\widetilde{A} = \{\alpha/x\}$ の表現は，x における $\widetilde{A}$ のメンバーシップの値が α であることを示す．そして $f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2, x_3\}$，$f^{-1}(y_2) = \{x_4, x_5\}$，$f^{-1}(y_3) = \{x_6\}$，$f^{-1}(y_4) = \phi$ なる対応関係があるとする．このときの拡張原理の概念図を示すと図 2･5(1) のようになる．一方，$\widetilde{B} = \{0.8/y_1, 0.1/y_2, 0.7/y_3, 0.2/y_4\}$ なるファ

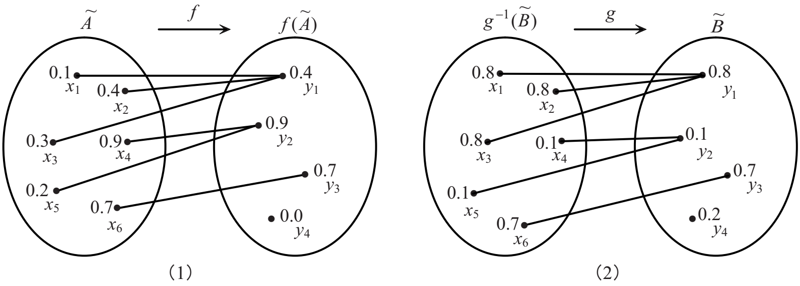

図 2･5　拡張原理の概念図

ジィ集合に対して，$y_1 = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$，$y_2 = g(x_4) = g(x_5)$，$y_3 = g(x_6)$ なる対応関係があるとすると，ファジィ集合 $\widetilde{B}$ の g による逆像の概念は図 2･5(2) のようになる．

次に，写像が $f : X \times Y \ \rightarrow Z$ のような，いわゆる 2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合を考える．X 上のファジィ集合を $\widetilde{A}$，Y 上のファジィ集合を $\widetilde{B}$ とすると，ファジィ集合 $\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$ の像 $f(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ は

$$\mu_{f(\widetilde{A},\widetilde{B})}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y)\} \tag{2･26}$$

で定義される．これが n 変数関数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ となった場合にも同様に考えられる．写像 $f : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \ \rightarrow \ Y$ を考え，各 X_i 上のファジィ集合 $\widetilde{A}_i$ の f による像 $f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \cdots, \widetilde{A}_n)$ は

$$\mu_{f(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\cdots,\widetilde{A}_n)}(y) = \sup_{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), \cdots, \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\} \tag{2･27}$$

で定義される．

(2) ファジィ数の計算

拡張原理の例として，ファジィ数の四則演算を考えてみる．二つのファジィ数として，$\widetilde{A} =$「a くらいの数」，$\widetilde{B} =$「b くらいの数」を考える．この二つの四則演算 $f(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \widetilde{A} * \widetilde{B}$ は式 (2･26) から

$$\mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(z) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(z)} \min\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(y)\} \tag{2･28}$$

で求められる．今，$\widetilde{A} =$「3 くらいの数」$= \{0.6/2, 1/3, 0.8/4\}$，$\widetilde{B} =$「5 くらいの数」$= \{0.8/4, 1/5, 0.7/6\}$ とすると，足し算の結果は式 (2･28) を用いると表 2･1 のように求まり，「およそ 8 くらいの数」となる．

このようにファジィ数の演算は式 (2･26) で表される拡張原理を用いても求まるが，α －

レベル集合による区間の演算として求める方が簡単であり，一般的である．ファジィ数 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ の α －レベル集合はそれぞれ，$\widetilde{A}_\alpha = [x_{\widetilde{A}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha)]$，$\widetilde{B}_\alpha = [y_{\widetilde{B}1}(\alpha), y_{\widetilde{B}2}(\alpha)]$ で表され，$(\widetilde{A} * \widetilde{B})_\alpha$ は表 2･2 のように求まり，分解定理を応用すると演算の結果のファジィ集合が得られる．ただし，$x_{\widetilde{A}1}(\alpha) > 0$，$x_{\widetilde{A}2}(\alpha) > 0$，$y_{\widetilde{B}1}(\alpha) > 0$，$y_{\widetilde{B}2}(\alpha) > 0$ とする．

表 2･1　拡張原理によるファジィ数の足し算の例

z	x	y	$\mu_{\widetilde{A}(x)}$	$\mu_{\widetilde{B}(y)}$	$\mu_{\widetilde{A}(x)} \wedge \mu_{\widetilde{B}(y)}$	$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(z)$
6	2	4	0.6	0.8	0.6	0.6
7	2	5	0.6	1.0	0.6	0.8
	3	4	1.0	0.8	0.8	
8	2	6	0.6	0.7	0.6	
	3	5	1.0	1.0	1.0	1.0
	4	4	0.8	0.8	0.8	
9	3	6	1.0	0.7	0.7	0.8
	4	5	0.8	1.0	0.8	
10	4	6	0.8	0.7	0.7	0.7

表 2･2　区間演算によるファジィ数の四則演算

$$[x_{\widetilde{A}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha)] + [y_{\widetilde{B}1}(\alpha), y_{\widetilde{B}2}(\alpha)] = [x_{\widetilde{A}1}(\alpha) + y_{\widetilde{B}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha) + y_{\widetilde{B}2}(\alpha)]$$
$$[x_{\widetilde{A}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha)] - [y_{\widetilde{B}1}(\alpha), y_{\widetilde{B}2}(\alpha)] = [x_{\widetilde{A}1}(\alpha) - y_{\widetilde{B}2}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha) - y_{\widetilde{B}1}(\alpha)]$$
$$[x_{\widetilde{A}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha)] \times [y_{\widetilde{B}1}(\alpha), y_{\widetilde{B}2}(\alpha)] = [x_{\widetilde{A}1}(\alpha) \times y_{\widetilde{B}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha) \times y_{\widetilde{B}2}(\alpha)]$$
$$[x_{\widetilde{A}1}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha)] \div [y_{\widetilde{B}1}(\alpha), y_{\widetilde{B}2}(\alpha)] = [x_{\widetilde{A}1}(\alpha) \div y_{\widetilde{B}2}(\alpha), x_{\widetilde{A}2}(\alpha) \div y_{\widetilde{B}1}(\alpha)]$$

$\widetilde{A}$ =「3 くらいの数」，$\widetilde{B}$ =「5 くらいの数」のメンバーシップ関数を図 2･6(1) のようにするとその足し算の結果は図 2･6(2) のように求まる．

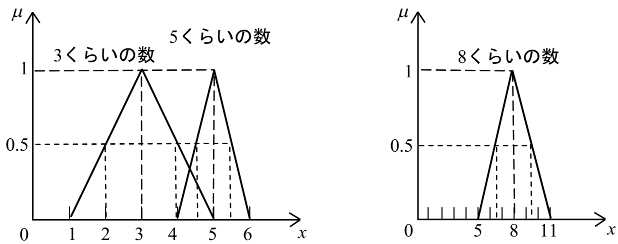

図 2･6　α －レベル集合によるファジィ数の足し算の例

■**参考文献**

1)　本多中二，大里有生, “ファジィ工学入門,” 海文堂, 1989.
2)　日本ファジィ学会　編, “講座ファジィ 2，ファジィ集合,” 日刊工業新聞社, 1992.
3)　R.E. Bellman and M. Giertz, “On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets,” Information Sciences, vol.5, pp149–156, 1973.

■S3 群 - 4 編 - 2 章

2-3 ファジィ論理

（執筆者：吉田真一）［2011 年 3 月 受領］

2-3-1 ファジィ命題と真理値のファジィ化

（1）ファジィ命題

クリスプ論理（二値論理）において命題とは，意味が明確でありかつその内容の真偽が明確である主張である．命題が主張する内容の真偽を命題の真理値と呼び，真理値は真または偽の 2 値のうち，いずれかを取る．例えば，「富士山は日本の最高峰である」は命題であり，その真理値は真である．命題の真理値を真偽のいずれかに決められない主張は，クリスプ論理では扱わない．例えば，「富士山は美しい山である」や「箱根山は高い山である」という主張は，二値論理の命題としては適切でない．それは，必ずしも真とは認められないからである．

人間が日常扱う情報では，真とも偽とも決められない主張も多い．しかし，真偽をはっきり定められないからといって，そのような主張に意味がないわけではない．人間は，このような個人の主観，定義のあいまいさ，事象の不確実さなど，様々な要因に起因するあいまいさを含んだ情報をうまく処理し，知識として役立てている．ファジィ論理では，このような真偽をはっきりと定めることができない命題を扱い，推論などの情報処理を行う．

真偽をはっきりと定めることのできない命題をファジィ命題と呼び，これを取り扱う論理体系をファジィ論理と呼ぶ．ファジィ論理では，命題の真理値を 2 値で表すことができないため，真理値集合は，一般に要素数が 3 以上の順序集合となる．

（2）数値真理値

ファジィ命題の真理値集合を $[0, 1]$ の実数閉区間としたファジィ真理値を，数値真理値と呼ぶ[1, 2]．最も一般的に用いられるファジィ真理値集合であり，その意味解釈としては，0 を偽，1 を真，0.5 を不定とするものである．

このファジィ真理値集合には，二つの順序構造を入れることができる．一つ目は，あいまいさの順序 $\succeq_a$ で，0 及び 1 をあいまいさが最小，0.5 をあいまいさが最大とした半順序構造である．もう一つの順序構造は，2 値論理でのブール代数における真理値の値（正しさ）による順序 $\geq$ の拡張で，真理値 0 を最小，1 を最大とする全順序構造である（図 2･7）．

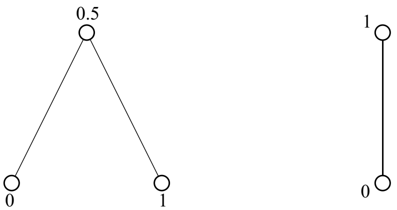

図 2･7　あいまいさの順序 $\succeq_a$ （左）と真理値の正しさの順序 $\geq$ （右）

(a) 多値論理

ファジィ論理のほかにも，2 値よりも多くの元からなる真理値集合を用いた多値論理は数多く存在する．真理値集合としては，3 値，あるいは有限の n 値としたものが多く，真理値

集合としては同一でも，論理演算の定義の違いにより，それらの多値論理としての違いが現れる．

クリーネの 3 値論理，ルカシェヴィッツの 3 値論理，ポストの n 値論理，ゲーデルの 3 値論理などが有名であるが，そのうちクリーネの 3 値論理は，Max 及び Min を採用したファジィ論理と関係が深く，また，ルカシェヴィッツの 3 値論理は，限界積，限界和演算を採用したファジィ論理と関係が深い[3)]．

(3) 束ファジィ論理

真理値集合として束を用いた論理体系が，束ファジィ論理である[4)]．数値真理値は，ブール代数の拡張として真理値集合の値の間に全順序関係を入れることができたが，束ファジィ論理では，更に真理値集合の値の間に，順序関係による束構造を定義したものである．この論理体系は，二つの論理値が必ずしも直接比較可能でないような場合に用いられる．L-ファジィ論理は，束ファジィ論理と同義である場合もあるが，より一般の半順序集合を真理値集合とする場合もある．束に限定する方が，真理値の間の論理演算を最小上界，最大下界として自然に定義することができるため，より使いやすい．

(4) 区間真理値

区間真理値は，$[0,1]$ 上の閉区間 $[x,y]$ を真理値として採用したものである[2)]．数値真理値では，ある命題の真偽の度合は，一つの値として定める必要があったが，この真偽の度合の値を一つに定められないような場合に用いる論理体系が区間真理値である．例えば,「明日は雨である」という命題の真理値を，数値真理値では「0.7」などと定める必要があったが,区間真理値では「0.6 から 0.8 の間である」と定める．

区間真理値は，$[x,y]$（ただし，$x,y \in [0,1], x \leq y$）のように表される．真理値の順序関係は，下記のように，真理値である二つの区間の上限，下限の両者ともに同様の順序関係が成り立つ場合に，その二つの真理値の順序関係が成り立つと定義する．

$$\forall A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2],$$
$$A \leq B \overset{\mathrm{def}}{=} (a_1 \leq b_1 \text{ and } a_2 \leq b_2)$$

(5) ファジィ真理値

ファジィ真理値は，真理値として閉区間 $[0,1]$ 上のファジィ集合としたものである[2)]．これは，数値真理値及び区間真理値を部分集合として含む，より一般的な真理値集合である．ファジィ真理値は，[0, 1]（数値真理値の集合）上のファジィ集合であり，この真理値を採用した元の台集合上のファジィ集合は，タイプ 2 のファジィ集合となる．

図 2･8 に，数値真理値，区間真理値，ファジィ真理値を示す．

(6) 言語真理値

言語真理値は，真理値として，“真”, “真でない”, “偽”, “とても真”, “やや真” といった,日常，人間が言語表現として用いる真理値を，そのまま真理値としたものである．ファジィ論理においては，実際には，ファジィ真理値などで実際の真理値を表現し，その真理値のラベルとして，これらの言語を用いる．

ファジィ真理値による言語真理値の表現のうち，よく用いられるものを図 2･9 に示す．“完全に偽” 及び “完全に真” は数値真理値の “0（偽）” 及び “1（真）” である．図 2･9 の

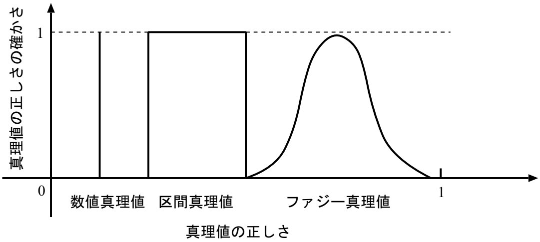

図 2･8　数値真理値，区間真理値，ファジィ真理値

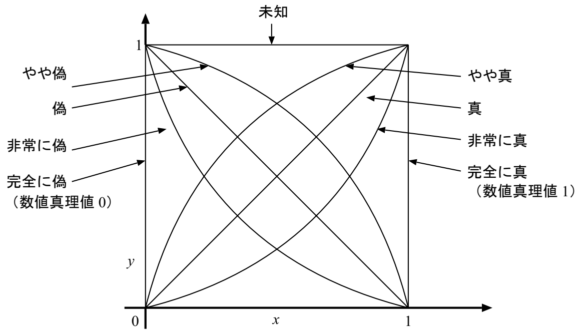

図 2･9　ファジィ真理値で表された言語真理値

横軸は真理値の正しさ x を，縦軸はその正しさの確かさ y を表し，このとき，“真” 及び “偽” は，それぞれ $y = x$，$y = 1 - x$ となる．また，しばしば “非常に真” は x^2，“やや真” は $x^{\frac{1}{2}}$ などで表される．

2-3-2 ファジィ複合命題とファジィ論理演算

(1) ファジィ複合命題

二値論理では，二つの命題に対して「かつ」や「または」などを用いて命題を統合し，新たな命題を構成することで，より複雑な命題をつくる．新たな命題の真理値は，元の命題の真理値に対して AND，OR 演算を行うことで定義する．これらの演算に否定演算を加えた演算の体系は，ブール代数を構成する．

ファジィ論理では，複数の命題を統合し新たな命題をつくる体系を，二値論理におけるブール代数を拡張するかたちで定義することができるが，拡張は無限に考えることができるため，これまでに多くの論理演算系が提案されている．本節では，それらのうち代表的なものについて説明する．

(2) t ノルム，t コノルム

t ノルムは，二値論理における連言の演算である AND を数値真理値上に拡張した演算である．t ノルムの公理を以下に示す．この公理で定められる t ノルムの特性を図 2･10 に示す．T1 は，境界の値を定めており，図 2･10 の太線で示された部分の真理値は，この条件により決定される．T2 は交換法則を，T3 では単調性を，T4 は結合法則を要求する．

$\forall x, y, z \in [0,1]$,

(T1) 境界条件 $x \ (t) \ 1 = x, \quad x \ (t) \ 0 = 0$

(T2) 交換法則 $x \ (t) \ y = y \ (t) \ x$

(T3) 単調性 $x \leq y \Rightarrow x \ (t) \ z \leq y \ (t) \ z$

(T4) 結合法則 $x \ (t) \ (y \ (t) \ z) = (x \ (t) \ y) \ (t) \ z$

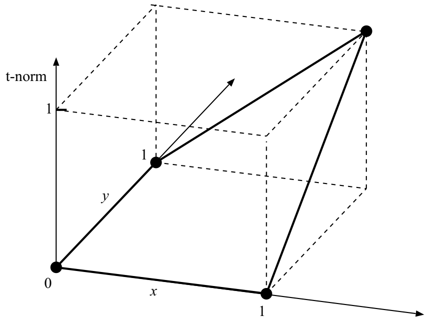

図 2･10 t ノルムの特性

同様に t コノルムは，二値論理における選言の演算である OR の，数値真理値上への拡張である．t コノルムは，しばしば s ノルムとも呼ばれる．AND, OR と同様，t ノルムと t コノルムは，双対的な演算である．t コノルムの公理を以下に示す．S1 の境界条件が，T1 と異なる以外は，t ノルムの公理と同じである．この公理で表される t コノルムの特性を図 2･11 に示す．

$\forall x, y, z \in [0,1]$,

(S1) 境界条件 $x \ (s) \ 0 = x, \quad x \ (s) \ 1 = 1$

(S2) 交換法則 $x \ (s) \ y = y \ (s) \ x$

(S3) 単調性 $x \leq y \Rightarrow x \ (s) \ z \leq y \ (s) \ z$

(S4) 結合法則 $x \ (s) \ (y \ (s) \ z) = (x \ (s) \ y) \ (s) \ z$

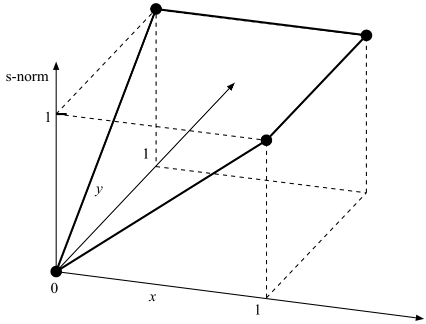

図 2·11　t コノルムの特性

ファジィ否定は，二値論理における否定 NOT の数値真理値上への拡張である．

$\forall x, y \in [0,1]$,

(N1) 境界条件　$0^{\textcircled{n}} = 1$

(N2) 二重否定　$(x^{\textcircled{n}})^{\textcircled{n}} = x$

(N3) 単調減少　$x < y \Rightarrow x^{\textcircled{n}} > y^{\textcircled{n}}$

表 2·3 に代表的な t ノルム，t コノルムを示す．

表 2·3　代表的な t ノルム，t コノルム

	t ノルム	t コノルム
論理積 (Min)・**論理和** (Max)	$x \wedge y = \min(x, y)$	$x \vee y = \max(x, y)$
代数積・代数和	$x \cdot y$	$x \dot{+} y = x + y - xy$
限界積・限界和	$x \odot y = 0 \vee (x + y - 1)$	$x \oplus y = 1 \wedge (x + y)$
激烈積・激烈和	$x \dot{\wedge} y = \begin{cases} x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$x \dot{\vee} y = \begin{cases} x & y = 0 \\ y & x = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

論理積，論理和は，最もよく用いられる t ノルム，t コノルムであり，理論面からも相補律が成立しないこと以外はブール代数と同じ数学的構造をもっているので，よく研究されている（図 2·12）．代数積，代数和は，なめらかな特性をもっているため，ファジィ制御などでのシステム解析において，微分が行えるなど理論的な取扱いがしやすいためよく用いられる（図 2·13）．限界積，限界和は，ルカシェヴイッツの多値論理との関係が深い（図 2·14）．激烈積は，t ノルムの公理で定められた値以外は，すべて 0 とした極端な論理演算であり，論理演算の結果，出力される真理値は，ほとんど 0 となる．同様に，激烈和の出力も同様にほとんど 1 となるため，実用上はあまり用いられることがない（図 2·15）．

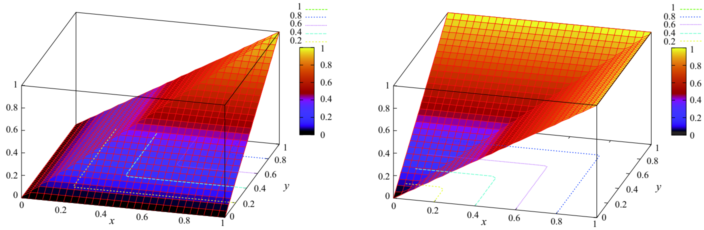

図 2･12　Min 演算と Max 演算

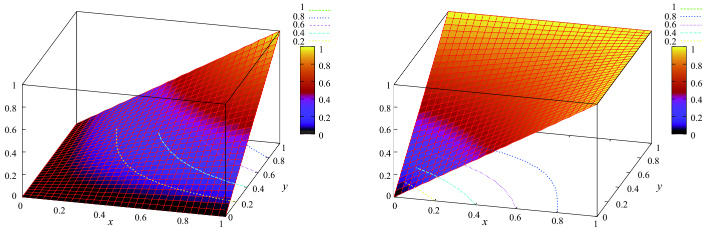

図 2･13　代数積演算と代数和演算

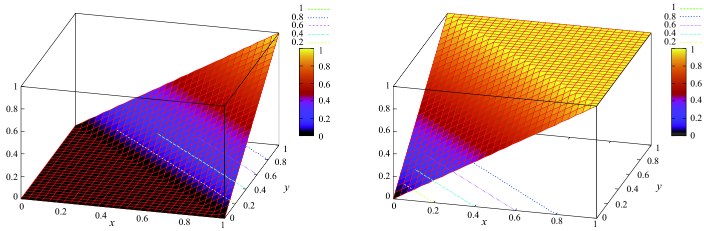

図 2･14　限界積演算と限界和演算

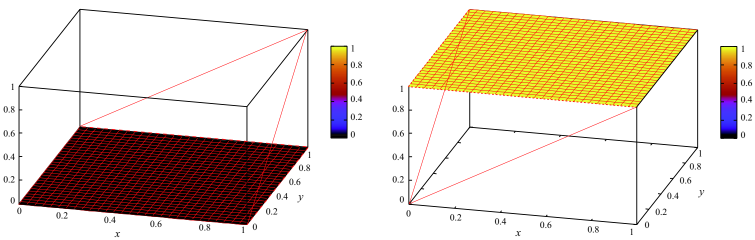

図 2･15　激烈積演算と激烈和演算

これらの t ノルム，t コノルムの間には下記のような順序関係がある．

$$\begin{aligned}&\forall x, y \in [0,1],\\ &x \mathbin{\dot{\wedge}} y \le x \odot y \le x \cdot y \le x \wedge y \le x \vee y \le x \mathbin{\dot{+}} y \le x \oplus y \le x \mathbin{\dot{\vee}} y\end{aligned} \tag{2·29}$$

激烈積は最小の t ノルム，論理積は最大の t ノルム，論理和は最小の t コノルム，激烈和は最大の t コノルムであることが公理から示せる[3)]．

また，パラメータのついた t ノルム演算も提案されている．代表的なものを表 2･4 に挙げる．パラメータ（式中の p や λ を変化させることにより，t ノルム，t コノルムの関数の特性を変化させることができる．ハーマッハーの t ノルムは，$p = 1$ において代数積となり，$p \to +\infty$ のとき，激烈積に近づく．イエーガーの t ノルムでは，$p \to +0$ のとき激烈積となり，$p = 1$ で限界積，$p \to +\infty$ で論理積（Min）演算となる．フランクの t ノルムの場合，$p \to +0$ で論理積演算，$p \to 1$ で代数積，$p \to +\infty$ で限界積となる．

表 2･4　パラメータ付き t ノルム，t コノルム

	t ノルム	**t コノルム**
ハーマッハー	$\dfrac{xy}{p+(1-p)(x+y-xy)}$	$\dfrac{x+y-xy-(1-p)xy}{1-(1-p)xy}$
イエーガー	$1-(1 \wedge \sqrt[p]{(1-x)^p+(1-y)^p})$	$1 \wedge \sqrt[p]{x^p+y^p}$
フランク	$\log_p(1+\dfrac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1})$	$1-\log_p(1+\dfrac{(p^{1-x}-1)(p^{1-y}-1)}{p-1})$
シュバイツアー	$\sqrt[p]{0 \vee (x^p+y^p-1)}$	$1-(0 \vee \sqrt[p]{(1-x)^p+(1-y)^p-1})$
菅野	$0 \vee (x+y-1-\lambda(1-x)(1-y))$	$1 \wedge (x+y+\lambda xy)$

これらのほかにも，数多くの t ノルムが提案されているが，これらについては，例えば文献 5) などに詳しい．

2-3-3 ファジィ論理関数の性質

t ノルム，t コノルム，ファジィ否定として最も広く用いられているものは，それぞれ Min，Max，1 からの差であるが，これらを用いた演算系においては，その論理関数としての性質について多くのことが明らかになっており，それらについて説明する．

Min，Max，1 からの差による演算系は，二値論理でのブール代数の性質がほとんど備わっている．すなわち，べき等，交換，結合，吸収，分配，二重否定，ド・モルガン，最大元，最小元の各法則がすべて成り立つ．しかし，相補法則のみ成り立たない点がブール代数と異なる．相補法則をやや弱めた，下記の条件は成立する．

$$\begin{aligned}&x \wedge (1-x) \le \frac{1}{2}\\ &x \vee (1-x) \ge \frac{1}{2}\end{aligned}$$

これは，任意の $x, y \in [0,1]$ に対して，以下の等式が成り立つことを示している．この等式をクリーネの法則という．

$$(x \vee (1-x)) \vee (y \wedge (1-y)) = x \vee (1-x)$$
$$(x \vee (1-x)) \wedge (y \wedge (1-y)) = y \wedge (1-y)$$

Min，Max，1 からの差による演算系は，クリーネ代数のモデルの一つとなっている．クリーネ代数はクリーネの 3 値論理と関連しており，論理演算系の意味では，クリーネの 3 値論理と Min，Max，1 からの差を用いたファジィ論理は同じ論理演算系のモデルである．すなわち，クリーネの 3 値論理で等しい論理式は，Min，Max，1 からの差でのファジィ論理でも等しい．このことから，論理式中の各論理変数の値が，0，1/2，1 の場合の論理関数値を調べれば，その論理関数は一意に定まる．つまり，3 値の真理値表でファジィ論理関数を表現することができる．また，ファジィ論理の真理値表から加法標準形，乗法標準形の論理式を導出する方法も提案されている[2)]．このことから，Min，Max，1 からの差によるファジィ論理において，n 変数のファジィ論理関数の数は有限である．また，この演算系では，ファジィ論理関数はあいまいさの順序 $\succeq_a$ を保存する．すなわち，下記の性質が成り立つ．

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in [0,1],$$
$$\forall f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) : n \text{ 変数ファジィ論理関数}$$
$$x_1 \succeq_a y_1, x_2 \succeq_a y_2, \cdots, x_n \succeq_a y_n \Rightarrow f_1 \succeq_a f_2$$

（ただし，$\succeq_a$ はあいまいさの順序による不等式）

このように，t ノルム，t コノルム，ファジィ否定を Min，Max，1 からの差に限定したファジィ論理については，多くのブール代数の有用な性質を受け継いでおり，多くの解析がなされている[1)2)]．

2-3-4 ファジィ述語

(1) ファジィ述語

以下のように，命題中に変数が含まれるような主張を，ファジィ述語と呼ぶ．

x は A である　(2･30)

ただし，A の意味はファジィ集合で表現されるとする．変数 x に具体的な値が代入されてファジィ命題となり，その真理値が定まる．すなわち，ファジィ述語は x の全体集合 X から，真理値集合への関数となる．ファジィ述語の真理値集合として数値真理値を採用した場合，ファジィ述語は X 上のファジィ部分集合と同一視できる．

(2) 真理値限定

ファジィ述語に対して，以下のように言語真理値を対応させることを考える．

（x は A である）は，やや真である　(2･31)

“やや真” の言語真理値は，ファジィ真理値（$[0,1] \rightarrow [0,1]$）で表されるので，例えば 2･9 節の例に従えば，$\mu_A(x)^{\frac{1}{2}}$ が真理値となる．ここで，$\mu_{A'}(x) = \mu_A(x)^{\frac{1}{2}}$ なるファジィ集合 A' を考えれば，上記の述語は，以下の述語と同一視できる．

x は A' である　(2･32)

このように，式 (2･31) から 式 (2･32) のかたちのファジィ述語を導くことを真理値限定という．この操作により，任意のファジィ述語は，式 (2･30) のかたちに変形することができるので，式 (2･30) のかたちを，ファジィ述語の標準形という．

（3）逆真理値限定

真理値限定の場合と逆に，以下のような述語の等式において，A と A' が与えられたときに，ファジィ真理値 t を求めることを逆真理値限定という．

$$(x \text{ は } A \text{ である}) \text{ は } t \text{ である} = x \text{ は } A' \text{ である}$$

（4）言語近似

逆真理値限定においては，真理値限定の場合と異なり，求められたファジィ真理値 t に対して，必ずしも対応する言語真理値が存在するとは限らない．t から近似的に言語真理値を求めることを，言語近似問題という．

2-3-5 ファジィ推論

一般に推論は，$A \to B$ の形式の推論規則（ルール）から，演繹を行うが，二値論理と異なりファジィ論理では，A 及び B は真か偽とは限らない．この真理値と演繹の拡張には様々な方法があるため，数多くの種類のファジー推論が提案されている．

二値論理において，通常の推論ではモダスポーネンス（三段論法肯定式）が用いられることが多いが[3]，ファジィ推論は，ファジィ化したモダスポーネンスの具体的な計算方法を定義し，それに従い，既知の事実から新たな結論を近似的に推論していく手法である．ファジィ推論は，入力及び出力のファジィ集合を直接扱う直接法と，ファジィ真理値に置き換えてから推論処理を行う間接法に分けられる．

（1）ファジィ含意

最も単純なファジィ推論は，論理値として数値論理値を用い，推論におけるルールに用いられる → 演算に，含意演算を用いるものである．ファジィ論理における含意演算 $x \to y$ は，t ノルム，t コノルムと同様多くの演算がある[5]．

含意	$x \to y$
クリーネの含意	$\max(1-x, y)$
ザデーの含意	$\max(1-x, \min(x,y))$
ルカシェヴイッツの含意	$\min(1, 1-x+y)$
ゲーデルの含意	$\begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ 0 & (x > y) \end{cases}$
マムダニの含意	$\min(x, y)$

このうち，マムダニの含意以外は，二値論理の含意の拡張になっている．

（2）ファジィモダスポーネンス

モダスポーネンスは，推論規則 $A \to B$ と入力 A が与えられたとき（真であるとき），結論 B を導く演繹法である．

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & B \\ A & & \\ \hline & & B \end{array}$$

二値論理では，$A \rightarrow B$ というルールが与えられたときに，A が真のときのみ，B が結論として導かれる（B が真となる）．ファジィ推論においては，A となる命題の真理値が完全に真でなくともルールを適用し，B にある程度の真理値を与える．これは，$A \rightarrow B$ というルールに対して，A に近い入力 A' であれば，B に近い推論結果 B' を出力するというものであり，近似推論の一つである．

(3) 直接法

直接法によるファジィ推論は，ルールの前提となる条件（ルール前件部）を入力値の全体集合上のファジィ集合 A で定義し，ルールの結論部（ルール後件部）を出力値の全体集合上のファジィ集合 B で定義する．

入力ファジィ集合 A' と A の類似度に応じて，B に類似した出力 B' を出力する．

直接法の処理の流れを下記に示す．

(1) 事実 A' とルール $A \rightarrow B$ の前件部である A との照合を行う（図 2･16）．

(2) A' と A の一致の度合に応じて，後件部 B を B' に変形する（図 2･17）．

(3) 上記の処理を，すべてのルールに対して行い，それぞれのルールにおける出力 B' を求め，統合して一つのファジィ出力値 B'' 求める（図 2･18）．

(4) ファジィ出力 B'' から，クリスプ出力を得る．この処理は非ファジィ化と呼ばれ，ファジィ集合の代表値を求める演算である．脱ファジィ化，逆ファジィ化と呼ばれることもある（図 2･19）．

(4) マムダニ法

マムダニ法[6)]は，直接法の一つである．(1) の照合の処理について，A と A' の Min 演算を行い，その結果の最も高いメンバーシップ値を適合度とする．適合度をもとに，(2) の後件部のメンバーシップ関数の変形を行う．この変形は，後件部メンバーシップ関数から，適合度よりも大きいメンバーシップ値を適合度の値にするものである．この処理は，含意に Min 演算を用いていると解釈できる（マムダニの含意）．次に，(3) の処理として複数のルールにおいて，並列に (1) 及び (2) の処理を行った結果の統合を行う．これは，複数のルールから出力される $B'_i(i \in \{1, 2, \cdots, n\}$: ルール番号) を，Max 演算を行うことで統合する．最後に，クリスプ値を出力するために，(4) の非ファジィ化の処理として，(3) で算出された出力メンバーシップ関数の重心を求め，その要素を出力値とする．以上の処理から，Min-Max 重心法とも呼ばれる．

直接法は，マムダニ法のほかにも，それぞれのステップの処理を別の演算で行う様々な方法が提案されている．有名なものとしては，ファジィ制御でよく用いられる代数積加算重心法（Product-Sum 重心法）[9)]，その計算コストを低減した簡略化推論法[7)]，数値解析の容

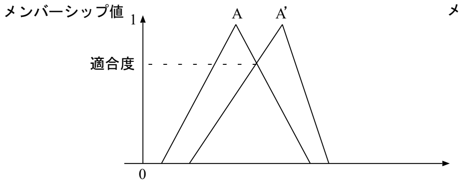

図 2·16　マムダニ推論(照合)

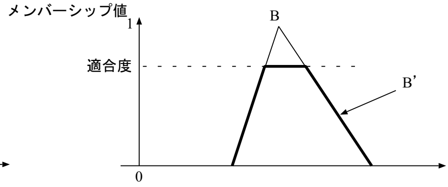

図 2·17　マムダニ推論(後件部変形)

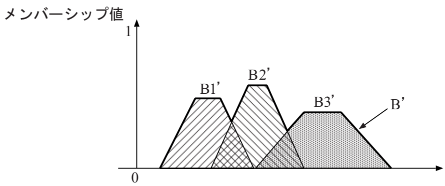

図 2·18　マムダニ推論(後件部統合)

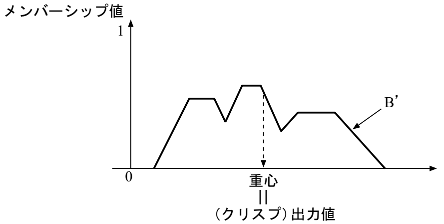

図 2·19　マムダニ推論(非ファジィ化)

易さから,制御のほかファジィモデリングにも用いられる高木菅野型ファジィ推論[8],ファジィシングルトン型推論法[10],前件部照合処理に距離の概念を導入した距離型ファジィ推論法[11],ルール数の増大を抑えながら少ないルール数で実用的な推論処理を得る,補間型推論法[12],単一入力ルール群結合型ファジィ推論法[13]などがある.

また,非ファジィ化処理についても,重心法のほか,高さ法,最大値法,面積法,中央値法など,多くのものが提案されており,適用対象の特性に応じて選択される[3, 14].

直接法の理論的根拠については,ファジィ関係の合成,ファジィ射影の観点からの考察がされている.これらについては,文献 2) などが詳しい.

(5)間接法

間接法によるファジィ推論は,ファジィ真理値を用いた推論法で,ファジィ述語「x は A である」と「x は A' である」が与えられたとき,逆真理値限定問題

$$(x \text{ は } A \text{ である}) \text{ は } t \text{ である} = x \text{ は } A' \text{ である}$$

を解くことにより得られる t を適合度とするものである.

この t と含意 $A \rightarrow B$ のファジィ真理値から,後件部のファジィ真理値 t' を求め,後件部のファジィ述語「x は B である」を,下記の真理値限定により変形した B' を結論とする.

$$(x \text{ は } B \text{ である}) \text{ は } t' \text{ である} = x \text{ は } B' \text{ である}$$

t 及び $A \rightarrow B$ のファジィ真理値から t' を求める方法により,ボールドウィンの推論法[15],水本の推論法[16],塚本の推論法[17]などがある.間接法は直接法に比較して処理が複雑なため,用いられる機会が少ない.直接法と間接法の関連や推論特性の比較は,文献 18, 19) などに詳しい.

■参考文献

1) 向殿政男, “Fuzzy 論理における 2, 3 の性質について,” 信学論, vol.58-D no.3, pp.150-157, 1975.
2) 向殿政男　著, 日本ファジィ学会編, “講座ファジィ 4 ファジィ論理,” 日刊工業新聞社, 1993.
3) 廣田　薫, “ファジィエキスパートシステム,” オーム社, 1993.
4) 水本雅晴, “ファジィ理論とその応用,” サイエンス社, 1989.
5) 大野貴司, 河口万由香, 伊達　惇, “t-ノルムに基づく種々のファジー論理関数の性質,” 信学論 (D-I), vol.J81-D-I, no.1, pp.1-10, 1998.
6) E.H. Mamdani, “Applications of Fuzzy Algorithm for Control of Simple Dynamic Plant,” Proc. IEE, vol.121, no.12, pp.1585-1588, 1974.
7) M. Maeda, S. Murakami, “A design of fuzzy logic controller,” Information Sciences, vol.45, pp.315-330, 1988.
8) T. Takagi, M. Sugeno, “Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modelling and Control,” IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-15, no.1, pp.116-132, 1985.
9) 水本雅晴, “ファジィ制御に対する改善法 (IV) - 代数積-加算-重心法による場合 - ,” 第 6 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp.9-13, 1990.
10) 水本雅晴, “ファジィ制御に対する改善法 (VI) - ファジーシングルトン型推論法による場合 -, ” 第 8 回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp.529-532, 1992.
11) Shuoyu Wang, Takeshi Tsuchiya, Masaharu Mizumoto, “Distance-Type Fuzzy Reasoning Method,” バイオメディカル・ファジィ・システム学会誌, vol.1, no.1, pp.61-78, 1999.
12) L.T. Koczy, K. Hirota, “Approximate Reasoning by Linear Rule Interpolation and General Approximation,” Int. J. Approximate Reasoning, vol.9, no.3, pp.197-225, 1993.
13) 湯場崎直義, 易建強, 廣田　薫, “複数入力ファジィ制御のための単一入力ルール群結合型ファジィ推論モデルの提案,” 日本ファジィ学会誌, vol.9, no.5, pp.699-709, 1997.
14) Marek J. Patyra, Eric Braun, Mike VanMeeteren, “High-Performance Digital Defuzzification and Defuzzifier Circuit,” J. Intelligent and Fuzzy Systems, vol.4, pp.161-173, 1996.
15) J.F. Baldwin, “A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic,” Fuzzy Sets and Systems, vol.2, pp.309-325, 1979.
16) 水本雅晴, “ファジィ推論法,” システムと制御, vol.23, pp.436-441, 1984.
17) Y. Tsukamoto, “An Approach to Fuzzy Reasoning Method,” in Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, edited by M.M. Gupta et al., North Holland, Amsterdam, 1979.
18) 向殿政男, 野島和行, “ファジィ推論における直接法と間接法に関する考察,” 日本ファジィ学会誌, vol.4, no.2, pp.325-333, 1992.
19) 川瀬　眞, 柳原二郎, “ファジー推論における間接法について,” 信学論 (A), vol.J77-A, no.3, pp.530-537, 1994.

■S3 群 - 4 編 - 2 章

2-4 ファジィ測度とファジィ積分

(執筆者：室伏俊明) [2008 年 11 月 受領]

測度は，現代数学における基本概念の一つであり，外延量の数学的表現である．ここで，外延量とは，長さ，面積，体積，質量などの広がりに規定される量をいう．測度とは，性質 $\mu(\emptyset) = 0$ と加法性「$A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$」をもつ，全体集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ 上に定義された関数 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ である．ただし，厳密には $\mathcal{F}$ は σ 集合体であり，m は σ 加法性をもつ（2-4-1 項 参照）．$P(X) = 1$ なる測度 P は確率測度と呼ばれ，これは確率の数学的表現である．ファジィ理論では，測度の概念は次の三つの方向から拡張され，それぞれファジィ測度と呼ばれている．

(1) 測度の取る値を実数からファジィ数にする

(2) 測度の引数を X の部分集合から X のファジィ部分集合にする

(3) 加法性を より弱い条件である単調性「$A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$」に置き換える

上記の 3 種のうち二つ以上の拡張を同時に行ったハイブリッド型もある．上記タイプ 3 のファジィ測度は，確率法則に縛られない主観的な確からしさを表すため，菅野によって 1972 年に提案された[1)]．日本でファジィ測度といえば，このタイプ 3 を指すことが多い．以下，本節で解説するのもタイプ 3 のものだけである．このタイプのファジィ測度は，数学的にはファジィ集合とは無関係であるため，本節にはファジィ集合は全く現れない．なお，タイプ 1 や 2 との混同を避けるため，タイプ 3 のファジィ測度を非加法的測度と呼ぶこともある．

ファジィ測度のうち，全体集合（全事象）の値が 1 であるものは，主観的な確からしさを表すものと解釈され，非加法的主観的確率とも呼ばれる．非加法的主観的確率は効用理論で用いられるほか，確率測度がベイズ推論に用いられるのと同様に，不確実推論にも用いられる．全体集合の値が 1 とは限らない一般のファジィ測度は，非加法性によって部分集合間の相互作用を表現できるので，構成要素間に相互作用のあるシステムの記述に利用される[2)]．

ファジィ測度には単調性が仮定されるが，最近は単調性を仮定しない非単調ファジィ測度も議論される．その理由の一つは，非単調ファジィ測度の概念が，ファジィ理論以外の分野で扱われている概念を含む包括的なものであるためである．非単調ファジィ測度は，協力ゲーム理論におけるゲームや，離散最適化理論において その最小化が議論されている劣モジュラ集合関数の概念を含む．

ファジィ積分とは，通常の積分のファジィ集合による拡張－ファジィ関数の積分や上記タイプ 1 や 2 のファジィ測度による積分－のほかに，タイプ 3 のファジィ測度による積分も指す．日本では特に後者を指すことが多いので，ここでは後者についてのみ解説する．

測度に関してはルベーグ（Lebesgue）式の積分が定義されるが，ファジィ測度は加法性をもたないため，ルベーグ式の積分の定義をそのままファジィ測度に当てはめることはできない．このため，菅野積分[1)]をはじめとする，ファジィ測度に関して種々の異なった積分が提案されることとなった．ファジィ積分という用語は，菅野積分だけを指すこともあるが，ファジィ測度に関する これらの積分全般も指すことが多い．非加法的主観確率に関するファジィ

積分は期待値の算出に使われ，一般のファジィ測度に関するファジィ積分は構成要素間に相互作用のある対象に関する総合化の演算として用いられる[2)]．

本節では，ファジィ積分のうち，ショケ（Choquet）積分，シポシュ（Šipoš）積分，菅野積分を紹介する．ショケ積分は，フランスの数学者 G. ショケが容量に関する論文[3)]のなかで定義した汎関数である．容量とは，ファジィ測度が提案される前から議論されてきた伝統的な数学的概念であり，特殊なファジィ測度である．シポシュ積分は，スロヴァキアの数学者 J. シポシュが前測度に関する積分として定義したものである[4)]．前測度とは実質的にファジィ測度と同じものである．また，菅野積分は，菅野がファジィ測度に関する積分として「ファジィ積分」という名で提案したものである[1)]．これらの積分は互いに異なるが，非負関数のショケ積分とシポシュ積分は同じ値を与える．また，測度に関する非負関数のショケ積分とシポシュ積分はルベーグ積分に一致し，有限測度に関するショケ積分とシポシュ積分もルベーグ積分に一致する．ここで，有限測度とは，全体集合の測度が有限である測度をいう．

なお，スペースの都合で本稿で取り扱えなかった事項も多い．文献 2) や 5) も参照されたい．

2-4-1 ファジィ測度の数学的定義

(1) 可測空間

X を空でない集合とするとき，次の 3 条件件を満たす $\mathcal{F} \subset 2^X$ を X 上の σ 集合体という．ここで，2^X は X のベキ集合である．

(s1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$,

(s2) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ 　　　（A^c は A の補集合),

(s3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

σ 集合体は，σ 代数，σ 加法族，可算加法族，完全加法族などともいう．X 上の σ 集合体で，最大のものは 2^X であり，最小のものは $\{\emptyset, X\}$ である．空でない集合 X と X 上の σ 集合体 $\mathcal{F}$ の対 $(X, \mathcal{F})$ を可測空間といい，$\mathcal{F}$ の要素を可測集合と呼ぶ．X が有限集合の場合，可測空間として普通 $(X, 2^X)$ を考えるので，X のすべての部分集合が可測となる．

(2) 測　度

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とするとき，次の二つの性質をもつ関数 $m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ を測度という．

(m1) $m(\emptyset) = 0$,

(m2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ が互いに素ならば

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

ここで，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が互いに素であるとは，任意の $m \neq n$ に対して $A_m \cap A_n = \emptyset$ である

ことをいう．性質 (m2) を σ 加法性，可算加法性，完全加法性などという．(m1) と (m2) をもつ $m : \mathcal{F} \to (-\infty, \infty]$ または $m : \mathcal{F} \to [-\infty, \infty)$ を符号付測度という．任意の測度は符号付測度である．m が可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の（符号付）測度のとき，3 項組 $(X, \mathcal{F}, m)$ を（符号付）測度空間という．任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $-\infty < m(A) < \infty$ である符号付測度は有限であるという．

$\pm\infty$ は実数ではなく，拡張実数と呼ばれる．$\pm\infty$ に関する関係や演算は次のように定められる．ここで，r は任意の実数とし，複号同順とする．

$$-\infty < r < \infty, \qquad \pm\infty + r = r + (\pm\infty) = (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$r \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times r = \begin{cases} \pm\infty & r > 0 \text{ のとき}, \\ 0 & r = 0 \text{ のとき}, \\ \mp\infty & r < 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = \infty, \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty, \qquad r/(\pm\infty) = 0.$$

ただし，$(\pm\infty) + (\mp\infty)$, $\infty/(\pm\infty)$, $(-\infty)/(\pm\infty)$ は定義されない．

（3）ファジィ測度

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とするとき，次の 2 条件を満たす関数 $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ をファジィ測度という．

(f1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(f2) $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

性質 (f2) を単調性という．ファジィ測度は，非加法的測度，容量，単調集合関数などとも呼ばれる．また，(f1) を満たす $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty, \infty]$ を非単調ファジィ測度または符号付ファジィ測度という．任意のファジィ測度は非単調ファジィ測度である．非単調ファジィ測度は，単に集合関数と呼ばれることもある．任意の測度は性質 (f2) をもつので，ファジィ測度である．また，任意の符号付測度は非単調ファジィ測度である．μ が可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の（非単調／符号付）ファジィ測度のとき，3 項組 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を（非単調／符号付）ファジィ測度空間という．任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $-\infty < \mu(A) < \infty$ である非単調ファジィ測度は有限であるという．X 上の有限非単調ファジィ測度 μ に対して，

$$\overline{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(A^c)$$

で定まる $\overline{\mu}$ を μ の共役または双対という．μ が有限ファジィ測度のとき $\overline{\mu}$ も有限ファジィ測度である．$\overline{\mu} = \mu$ のとき，μ は自己共役または自己双対であるという．有限符号付測度は自己共役である．

2-4-2 （非単調）ファジィ測度の例

以下，$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．

(1) 計数測度

$$c(A) = |A| \qquad (A \in \mathcal{F})$$

で定まる $c : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ は測度であり，これを計数測度という．ただし，$|A|$ は集合 A の要素数で，A が無限集合のときは $|A| = \infty$ である．

(2) ルベーグ測度

実数軸 $\mathbb{R}$ 上の測度 λ で，区間に対して その長さを与え，平行移動不変であり，完備であるものが唯一存在する．この測度 λ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ（Lebesuge）測度という．ただし，区間に対して その長さを与えるとは，$a \leq b$ なる任意の実数の対 a, b に対し

$$\lambda((a,b)) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a$$

が成立することである．また，平行移動不変とは，λ の値が定義可能な集合 A と任意の実数 r に対して，$A + r = \{a + r \mid a \in A\}$ としたとき，$\lambda(A + r)$ も定義可能であり，

$$\lambda(A + r) = \lambda(A)$$

が成立することである．完備とは，$\lambda(N) = 0$ ならば任意の $N' \subset N$ に対して $\lambda(N')$ が定義され $\lambda(N') = 0$ であることをいう．ルベーグ測度が定義可能な集合をルベーグ可測集合という．ルベーグ可測集合の全体は σ 集合体をなす．

(3) ディラック測度

$x \in X$ に対し，下の δ_x を x を焦点とするディラック（Dirac）測度という．

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & A \ni x \text{ のとき}, \\ 0 & A \not\ni x \text{ のとき}. \end{cases}$$

(4) 非加法的確率

$P(X) = 1$ である測度 P を確率測度という．ディラック測度は確率測度である．$\mu(X) = 1$ である非単調ファジィ測度 $\mu : \mathcal{F} \to [0, 1]$ は しばしば非加法的確率と呼ばれる．非加法的確率には，単調性 (f2) が仮定されることも多い．単調な非加法的確率は正規ファジィ測度とも呼ばれる．μ が非加法的確率のとき，その双対 $\overline{\mu}$ も非加法的確率である．確率測度は，加法性をもつ特殊な非加法的確率であり，正規ファジィ測度である．確率測度をもつ測度空間を確率空間といい，非加法的確率をもつファジィ測度空間を非加法的確率空間という．（非加法的）確率空間における可測集合は，事象と呼ばれる．

(5) 可能性測度と必然性測度

関数 $\pi : X \to [0, 1]$ が

$$\sup_{x \in X} \pi(x) = 1 \tag{2・33}$$

を満たすとき，

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x)$$

で定まる $\Pi : \mathcal{F} \to [0,1]$ は正規ファジィ測度であり，この Π を可能性測度，π を可能性分布関数，Π の双対 $\overline{\Pi}$ を必然性測度という．正規ファジィ集合のメンバーシップ関数 π は式 (2･33) を満たすので，可能性分布関数である．

(6) デンプスター・シェイファー理論[6)]

X を有限集合とする．次の関数 $m : 2^X \to [0,1]$ を基本確率割当という．

$$m(\emptyset) = 0, \qquad \sum_{A \subset X} m(A) = 1.$$

X 上の基本確率割当 m に対して，次の関数 $\mathrm{Bel} : 2^X \to [0,1]$ をビリーフ関数という．

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subset A} m(B). \tag{2･34}$$

ビリーフ関数は正規ファジィ測度である．ビリーフ関数 Bel から基本確率割当 m へは,

$$m(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|B|+1} \mathrm{Bel}(B) \tag{2･35}$$

で変換できる．よって，ビリーフ関数と基本確率割当の間には一対一の対応関係がある．なお，Bel が一般の集合関数のとき，式 (2･34) と式 (2･35) の関係にある関数 $m : 2^X \to \mathbb{R}$ を Bel のメビウス（Möbius）変換という．

ビリーフ関数の双対をプローザビリティ関数という．プローザビリティ関数 Pl と基本確率割当 m の間には次の関係がある．

$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{B : A \cap B \neq \emptyset} m(B).$$

ビリーフ関数とプローザビリティ関数は，証拠に基づく不確実な推論に用いられる．その不確実推論に関する理論を，デンプスター・シェイファー（Dempster-Shafer）理論または（デンプスター・シェイファーの）証拠理論という．

$\mathrm{Bel}_1, \mathrm{Bel}_2$ をビリーフ関数，m_1, m_2 をそれぞれの基本確率割当とするとき,

$$m(\emptyset) = 0,$$
$$m(A) = \frac{\displaystyle\sum_{A_1 \cap A_2 = A} m_1(A_1) m_2(A_2)}{\displaystyle\sum_{A_1 \cap A_2 \neq \emptyset} m_1(A_1) m_2(A_2)}$$

で定まる基本確率割当 m をもつビリーフ関数 Bel を Bel_1 と Bel_2 の直交和といい，$\mathrm{Bel} = \mathrm{Bel}_1 \oplus \mathrm{Bel}_2$ と表記する．これは，異なる証拠から個別に得られたビリーフ関数 $\mathrm{Bel}_1, \mathrm{Bel}_2$ を一つのビリーフ関数 Bel に統合する規則であり，デンプスターの結合則と呼ばれる．デン

プスター・シェイファー理論では，デンプスターの結合則により推論が行われる．

（7）分解可能測度

ⓢを t コノルムとするとき，

$$A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) ⓢ \mu(B)$$

が成り立つ正規ファジィ測度をⓢ分解可能測度という．$\oplus$ を限界和とするとき確率測度は $\oplus$ 分解可能測度であり，$\vee$ を論理和とするとき可能性測度は $\vee$ 分解可能測度である．λ 加法性

$$\begin{aligned} &A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset \implies \\ &\quad g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) \oplus_\lambda g_\lambda(B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \end{aligned}$$

をもつ正規ファジィ測度 g_λ を λ ファジィ測度という．ただし，λ は $-1 < \lambda < \infty$ なるパラメータである．λ ファジィ測度は菅野の t コノルム $\oplus_\lambda$ に関する分解可能測度である．$\lambda = 0$ のとき，有限集合上の λ ファジィ測度は確率測度である．

（8）協力ゲーム

協力ゲーム理論では，有限集合 N 上の非単調ファジィ測度 v が議論される．N の要素はプレイヤー，$S \subset N$ は提携，$v(S)$ は提携 $S \subset N$ の利得，v は特性関数またはゲームと呼ばれる．

（9）劣モジュラ集合関数と凸ゲーム

劣モジュラ不等式

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \le \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{F}$$

が成立するとき，集合関数 μ は劣モジュラであるという．多くの離散最適化問題が，有限集合上の劣モジュラ集合関数の最小化問題に帰着されることが知られている．優モジュラ不等式

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \ge \mu(A) + \mu(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{F}$$

が成立するとき，集合関数 μ は優モジュラであるという．協力ゲーム理論では，優モジュラであるゲーム v を凸ゲームと呼ぶ．

2-4-3 ファジィ積分

以下，$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．

（1）可測関数

X 上の関数 $f : X \to [-\infty, \infty]$ が $\mathcal{F}$ 可測（または単に可測）であるとは，

$$\{x \in X \mid f(x) > r\} \in \mathcal{F} \qquad \forall r \in \mathbb{R}$$

であることを言う．なお，上の条件は下の 3 条件それぞれと同値である．

$$\begin{aligned} &\{x \in X \mid f(x) \ge r\} \in \mathcal{F} \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \\ &\{x \in X \mid f(x) < r\} \in \mathcal{F} \qquad \forall r \in \mathbb{R}, \\ &\{x \in X \mid f(x) \le r\} \in \mathcal{F} \qquad \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

任意の定数関数は可測である．集合 $A \subset X$ の定義関数 χ_A が可測であることは，A が可測集合であることと同値である．f と g が可測関数のとき，$f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$ はすべて可測である．ここで，$\vee$ は max 演算，$\wedge$ は min 演算である．X が有限集合の場合など，可測空間として $(X, 2^X)$ を考えるとき，X 上のすべての関数は可測である．（非加法的）確率空間における可測関数は，確率変数と呼ばれる．常に値 $a \in \mathbb{R}$ をとる定数関数を a と書く．本項では，区間 $[a,b]$ に対して，可測関数 $f : X \to [a,b]$ の全体からなる集合を $\mathcal{M}[a,b]$ と書くことにする．

可測関数 f と g が共単調であるとは，任意の x, $x' \in X$ について

$$f(x) < f(x') \implies g(x) \leq g(x')$$

であることをいう．共単調性は反射的かつ対称的な 2 項関係である；すなわち，任意の関数 f は自分自身 f と共単調であり，関数 f と g が共単調ならば g と f は共単調である．また，任意の定数関数と任意の関数は共単調である．

値域が $\pm\infty$ を含まない有限集合である可測関数を単関数という．任意の単関数 f は次のように表現できる．

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}. \tag{2·36}$$

ここで，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ は実数，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ は互いに素な可測集合，χ_A は集合 A の定義関数である．有限集合上のすべての実数値関数は単関数である．

（2）ルベーグ積分

$(X, \mathcal{F}, m)$ を測度空間とする．$f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の m に関する（ルベーグ）積分 $\int f(x)\, dm(x)$（または $\int f\, dm$）は次の 3 段階で定義される．

(1) f が式 (2·36) で表される非負単関数の場合：

$$\int f\, dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i). \tag{2·37}$$

(2) $f \in \mathcal{M}[0, \infty]$ の場合：

$$\int f\, dm = \sup \left\{ \int g\, dm \;\middle|\; g \text{ は } 0 \leq g(x) \leq f(x)\ \forall x \in X \text{ なる単関数} \right\}.$$

(3) $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の場合：

$$\int f\, dm = \int f^+\, dm - \int f^-\, dm. \tag{2·38}$$

ただし，$\vee$ を max 演算として，

$$f^+(x) = f(x) \vee 0, \qquad f^-(x) = (-f(x)) \vee 0 \tag{2·39}$$

であり，式 (2･38) の右辺が $\infty - \infty$ のとき積分は定義されない．

符号付測度 m に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の積分は，m が二つの測度 m^+, m^- の差として

$$m(A) = m^+(A) - m^-(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

と表され，下式の右辺が定義される場合があるとき，

$$\int f\,dm = \int f\,dm^+ - \int f\,dm^-$$

により定義される．なお，有限集合上の符号付測度は，常に二つの測度の差として表される．有限集合上の有限符号付測度に関する実数値関数の積分は常に定義される．

符号付測度 m に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の $A \in \mathcal{F}$ 上の積分 $\int_A f\,dm$ は

$$\int_A f\,dm = \int f \cdot \chi_A\,dm$$

で定義される．ルベーグ測度 λ に関する区間 $[a, b]$ または $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) 上の積分を $\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．すなわち，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,d\lambda(x).$$

狭義のリーマン（Riemann）積分はルベーグ積分に一致する．

符号付測度 m に関するルベーグ積分は次の性質をもつ．

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\int \chi_A\,dm = m(A).$$

(2) m が測度であり，f, $g \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の m に関する積分が定義され，$f(x) \le g(x)$ $\forall x \in X$ であるとき

$$\int f\,dm \le \int g\,dm.$$

(3) m に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の積分が定義されるとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して下式の左辺が定義され，

$$\int af\,dm = a \cdot \int f\,dm.$$

(4) f, $g \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ に対して，$f + g$ と下式の右辺が定義されるならば，

$$\int (f+g)\,dm = \int f\,dm + \int g\,dm.$$

上の性質 (3), (4) より，m が符号付測度で $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ が式 (2･36) で表される一般の単関数の場合も，式 (2･37) が成立する．

(3) ショケ積分

μ を可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上のファジィ測度とするとき，$f \in \mathcal{M}[0, \infty]$ の μ に関するショケ (Choquet) 積分 (C) $\int f(x)\,d\mu(x)$（または (C) $\int f\,d\mu$）は，

$$\text{(C)} \int f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) > r\})\,dr$$

で定義される[3)]．ここで，右辺は通常の積分である．右辺の不等号 $>$ を $\geq$ に置き換えてもよい．すなわち，下式が成立する．

$$\text{(C)} \int f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq r\})\,dr.$$

μ が有限ファジィ測度の場合，$f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の μ に関するショケ積分は，

$$\text{(C)} \int f\,d\mu = \text{(C)} \int f^+\,d\mu - \text{(C)} \int f^-\,d\overline{\mu}$$

で定義される．ここで，f^+ と f^- は式 (2･39) で定義される関数であり，$\overline{\mu}$ は μ の共役である．なお，上式の右辺が $\infty - \infty$ となる場合には，左辺のショケ積分は定義されない．

$(X, \mathcal{F})$ 上の非単調ファジィ測度 μ に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ のショケ積分は，μ が二つのファジィ測度 μ^+, μ^- の差として

$$\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

と表され，下式の右辺が定義される場合があるとき，下式により定義される．

$$\text{(C)} \int f\,d\mu = \text{(C)} \int f\,d\mu^+ - \text{(C)} \int f\,d\mu^-.$$

なお，有限集合上の非単調ファジィ測度は，常に二つのファジィ測度の差として表される．有限集合上の有限非単調ファジィ測度に関する実数値関数のショケ積分は常に定義される．

ショケ積分は次の性質をもつ．ただし下では，μ が有限の場合は f, $g \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ とし，μ が有限でない場合は f, $g \in \mathcal{M}[0, \infty]$ とする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\text{(C)} \int \chi_A\,d\mu = \mu(A).$$

(2) μ がファジィ測度，$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$ でり，下式の両辺が定義されるとき，

$$(\mathrm{C})\int f\,d\mu \le (\mathrm{C})\int g\,d\mu.$$

(3) 二つのファジィ測度 μ, ν について $\mu(A) \le \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{F}$ かつ $\mu(X) = \nu(X)$ であり，下式の両辺が定義されるとき，

$$(\mathrm{C})\int f\,d\mu \le (\mathrm{C})\int f\,d\nu.$$

(4) μ に関する f のショケ積分が定義されるとき，任意の $a \ge 0$ に対して下式の左辺が定義され，

$$(\mathrm{C})\int af\,d\mu = a \cdot (\mathrm{C})\int f\,d\mu.$$

(5) μ が自己共役ならば，μ に関する f のショケ積分が定義されるとき，下式の左辺が定義され，

$$(\mathrm{C})\int (-f)\,d\mu = -(\mathrm{C})\int f\,d\mu.$$

(6) μ が符号付測度であり，μ に関する f のショケ積分が定義されるとき，μ に関する f のルベーグ積分 $\int f\,d\mu$ も定義され，

$$(\mathrm{C})\int f\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

(7) μ が劣モジュラなファジィ測度であり，$f+g$ と下式の右辺が定義され，f と g がともに下に有界ならば，

$$(\mathrm{C})\int (f+g)\,d\mu \le (\mathrm{C})\int f\,d\mu + (\mathrm{C})\int g\,d\mu.$$

(8) μ が優モジュラなファジィ測度であり，$f+g$ と下式の右辺が定義され，f と g がともに非負であるか，または，ともに上に有界ならば，

$$(\mathrm{C})\int (f+g)\,d\mu \ge (\mathrm{C})\int f\,d\mu + (\mathrm{C})\int g\,d\mu.$$

(9) f と g が共単調であり，$f+g$ と下式の右辺が定義されるならば，

$$(\mathrm{C})\int (f+g)\,d\mu = (\mathrm{C})\int f\,d\mu + (\mathrm{C})\int g\,d\mu.$$

μ が自己共役でないとき，一般に，下式の両辺が定義されても

$$(\mathrm{C})\int(-f)\,d\mu \neq -(\mathrm{C})\int f\,d\mu$$

である．この関係のため，ショケ積分は非対称積分とも呼ばれる．また，f と g が共単調でないとき，一般に，下式の両辺が定義されても，両者は必ずしも等しくはない．

$$(\mathrm{C})\int(f+g)\,d\mu \neq (\mathrm{C})\int f\,d\mu + (\mathrm{C})\int g\,d\mu.$$

上の性質 (1), (4), (9) より，単関数 (2･36) の μ に関するショケ積分は下式で与えられる．ただし，$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ と番号づけられているものとし，$a_0 = 0, \bigcup_{j=n+1}^{n} A_j = \emptyset$ とする．

$$\begin{aligned}(\mathrm{C})\int f\,d\mu &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\mu\left(\bigcup_{j=i}^{n} A_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\left[\mu\left(\bigcup_{j=i}^{n} A_j\right) - \mu\left(\bigcup_{j=i+1}^{n} A_j\right)\right].\end{aligned}$$

(4) シポシュ積分

$(X,\mathcal{F})$ 上のファジィ測度 μ に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty,\infty]$ のシポシュ(Šipoš)積分 $(\check{\mathrm{S}})\int f(x)\,d\mu(x)$（または $(\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu$）は,

$$(\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu = (\mathrm{C})\int f^{+}\,d\mu - (\mathrm{C})\int f^{-}\,d\mu$$

で定義される[4)]．ここで，f^{+} と f^{-} は式 (2･39) で定義される関数である．なお，上式の右辺が $\infty - \infty$ となる場合には，左辺のシポシュ積分は定義されない．

$(X,\mathcal{F})$ 上の非単調ファジィ測度 μ に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty,\infty]$ のシポシュ積分は，μ が二つのファジィ測度 μ^{+}, μ^{-} の差として

$$\mu(A) = \mu^{+}(A) - \mu^{-}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

と表され，下式の右辺が定義される場合があるとき，下式により定義される．

$$(\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu = (\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu^{+} - (\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu^{-}.$$

有限集合上の有限非単調ファジィ測度に関する実数値関数のシポシュ積分は常に定義される．

シポシュ積分は次の性質をもつ．

(1) μ がファジィ測度であり，f, $g \in \mathcal{M}[-\infty,\infty]$ の μ に関する積分が定義され，$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$ であるとき

$$(\check{\mathrm{S}})\int f\,d\mu \leq (\check{\mathrm{S}})\int g\,d\mu.$$

(2) μ に関する $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ の積分が定義されるとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して下式の左辺が定義され，

$$(\check{\mathrm{S}}) \int af \, d\mu = a \cdot (\check{\mathrm{S}}) \int f \, d\mu.$$

(3) 任意の $f \in \mathcal{M}[0, \infty]$ に対して，下式の一方の積分が定義されれば他方も定義されて

$$(\check{\mathrm{S}}) \int f \, d\mu = (\mathrm{C}) \int f \, d\mu.$$

(4) μ が自己共役のとき，任意の $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ に対し，下式の一方の積分が定義されれば他方も定義されて

$$(\check{\mathrm{S}}) \int f \, d\mu = (\mathrm{C}) \int f \, d\mu.$$

(5) 符号付測度 m と $f \in \mathcal{M}[-\infty, \infty]$ に対し，下式の一方の積分が定義されれば他方も定義されて

$$(\check{\mathrm{S}}) \int f \, dm = \int f \, dm.$$

上の性質 (2) より，下式の一方の積分が定義されれば他方も定義されて

$$(\check{\mathrm{S}}) \int (-f) \, d\mu = -(\check{\mathrm{S}}) \int f \, d\mu$$

が成り立つ．このため，シポシュ積分は対称積分とも呼ばれる．

（5）菅野積分

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ をファジィ測度空間とする．$f \in \mathcal{M}[0, \mu(X)]$ の μ に関する菅野積分 $⨍ f(x) \circ \mu(\cdot)$（または $⨍ f \circ \mu$）は，

$$⨍ f \circ \mu = \sup_{r \in [0, \mu(X)]} [r \wedge \mu(\{x \in X \mid f(x) > r\})]$$

で定義される[1)]．なお，右辺の不等号 $>$ を $\geq$ に置き換えてもよい．すなわち，

$$⨍ f \circ \mu = \sup_{r \in [0, \mu(X)]} [r \wedge \mu(\{x \in X \mid f(x) \geq r\})]$$

が成立する．菅野積分を考える場合，μ は正規ファジィ測度とされることが多い．非単調ファジィ測度に関する菅野積分は一般に議論されない．また，区間 $[0, \mu(X)]$ の外に値をとる関数の菅野積分も一般に議論されない．

菅野積分は次の性質をもつ．

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\fint (\mu(X) \cdot \chi_A) \circ \mu = \mu(A).$$

(2) 任意の $a \in [0, \mu(X)]$ に対して

$$\fint a \circ \mu = a.$$

(3) $f, g \in \mathcal{M}[0, \mu(X)]$ に対して，$f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$ ならば

$$\fint f \circ \mu \leq \fint g \circ \mu.$$

(4) 二つのファジィ測度 μ, ν について $\mu(A) \leq \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{F}$ かつ $\mu(X) = \nu(X)$ ならば，任意の $f \in \mathcal{M}[0, \mu(X)]$ に対して

$$\fint f \circ \mu \leq \fint f \circ \nu.$$

(5) $f, g \in \mathcal{M}[0, \mu(X)]$ が共単調ならば,

$$\fint (f \wedge g) \circ \mu = \fint f \circ \mu \wedge \fint g \circ \mu, \qquad \fint (f \vee g) \circ \mu = \fint f \circ \mu \vee \fint g \circ \mu.$$

上の性質 (1), (2), (5) より，単関数 (2･36) の μ に関する菅野積分は下式で与えられる．ただし，$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \mu(X)$ とする．

$$\fint f \circ \mu = \bigvee_{i=1}^{n} \left[a_i \wedge \mu \left(\bigcup_{j=i}^{n} A_j \right) \right].$$

μ が 2 値の正規ファジィ測度，すなわち $\mu(A) \in \{0, 1\}\ \forall A \in \mathcal{F}$ なる正規ファジィ測度のとき，任意の $f \in \mathcal{M}[0, 1]$ に対して,

$$\fint f \circ \mu = (\mathrm{C}) \int f \, d\mu.$$

μ を正規ファジィ測度，$f \in \mathcal{M}[0, 1]$ とするとき，次の関係式が成り立つ.

$$\left| \fint f \circ \mu - (\mathrm{C}) \int f \, d\mu \right| \leq \frac{1}{4}.$$

■参考文献

1) 菅野道夫, “ファジィ測度とファジィ積分,” 計測自動制御学会論文集, vol.8, no.2, pp.218–226, April 1972.

2) M. Grabisch, T. Murofushi, & M. Sugeno (Eds.), "Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications," Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.
3) G. Choquet, "Theory of capacities," Ann. Inst. Fourier, vol.5, pp.131–295, 1954.
4) J. Šipoš, "Integral with respect to a pre-measure," Math. Slovaca, vol.29, no.2, pp.141–155, 1979.
5) 室伏俊明, M. Grabisch, 藤本勝成, 今岡春樹, 成川康男, "ファジィ測度と積分," 「ファジィとソフトコンピューティング」ハンドブック, 日本ファジィ学会編, pp. 51–75, 共立出版, 2000.
6) G. Shafer, "A Mathematical Theory of Evidence," Princeton University Press, Princeton, 1976.